Soluzioni II

29/09/2003

Richiamo di Integrali

Esercizio 1. (1) Dato che $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, proviamo a scrivere la funzione integranda come:

$$\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Risolviamo quindi $I_1 = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$ ponendo $y = x^2+2x+3$:

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2+2x+3} + c.$$

Mentre per quanto riguarda $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$ può essere ricondotto ad un integrale del tipo

$$G_k = \int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,dt = \frac{2k-3}{2k-2}G_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\frac{t}{(1+t^2)^{k-1}},$$

dove $G_1 = \arctan t$. Infatti, visto che $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$, poniamo $t = (x+1)/\sqrt{2}$ quindi

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{4}G_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan t + \frac{\sqrt{2}t}{8(1+t^2)} + c \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c. \end{aligned}$$

In questo modo la soluzione diventa $\frac{1}{2}I_1 - 2I_2$.

(2) Scomponiamo il denominatore: $x^3-4x = x(x+2)(x-2)$, quindi possiamo scrivere

$$\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Svolgendo i calcoli si trova che $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{5}{8}$ e $C = \frac{7}{8}$, quindi il risulto sarà $-\frac{1}{4}\log|x| + -\frac{5}{8}\log|x+2| + \frac{7}{8}\log|x-2|$ a meno di una costante additiva. Notiamo però che il dominio di esistenza della funzione integranda è $\mathbb{R}\setminus\{0,2,-2\}$ e quindi la generica primitiva dipende, in realtà da 4 costanti arbitrarie, una per ogni intervallo connesso. In altre parole possiamo scrivere

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4}\log|x| + -\frac{5}{8}\log|x+2| + \frac{7}{8}\log|x-2| + | \\ &\quad + c_1\chi_{x<-2} + c_2\chi_{-2<x<0} + c_3\chi_{0<x<2} + c_4\chi_{x>2}. \end{aligned}$$

(3) Visto che il grado del numeratore è più alto del denominatore dividiamo i due polinomi:, otteniamo così:

$$\frac{3x^3+2x-5}{3x^2-5x-2} = x + \frac{5}{3} + \frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}.$$

Integrando otteniamo

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}\int \frac{37x-5}{3(x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3})}\,dx.$$

Come nel punto precedente poniamo, essendo $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 2$ le radici del polinomio $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

$$\frac{37x-5}{x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}} = \frac{A}{x+\frac{1}{3}} + \frac{B}{x-2},$$

svolgendo i calcoli otteniamo che $A = \frac{52}{7}$ e $B = \frac{207}{7}$ quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{1}{9}\left(\log\left|x+\frac{1}{3}\right| - \log|x-2|\right) \\ &\quad + c_1\chi_{x<-1/3} + c_2\chi_{-1/3<x<2} + c_3\chi_{x>2}. \end{aligned}$$

(4) Osserviamo che $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3$ quindi poniamo

$$\frac{x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

con $A=-1$, $B=1$, $C=0$ e $D=1$,. Quindi

$$I = -\log|x| + \log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

(5) Osserviamo che $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)^2(x-3)$, quindi

$$\frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}$$

dove $A = \frac{1}{16}$, $B = \frac{5}{4}$ e $C = -\frac{1}{16}$. Alla fine abbiamo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16}\log|x+1| - \frac{5}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{16\log|x-3|} \\ &\quad + c_1\chi_{x<-1} + c_2\chi_{-1<x<3} + c_3\chi_{x>3}. \end{aligned}$$

(6) Essendo $\Delta = (-2)^2 - 5 \cdot 4 = -16 < 0$, poniamo

$$\frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2-2x+5)^2}$$

con $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$ e $D = -3$, risolvendo poi come nel punto (1) otteniamo

$$I = \frac{7}{16} \arctan \frac{x-1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x+7}{x^2-2x+5} + c.$$

Esercizio 2. (1) Poniamo $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sin t$ quindi l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \int \sin^3 t \cos^2 t \, dt = \frac{9\sqrt{3}}{4} \int (1 - \cos^2 t) \cos^2 t \sin t \, dt \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} \cos^3 t + \frac{9\sqrt{3}}{20} \cos^5 t + c \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \right)^{3/2} + \frac{9\sqrt{3}}{20} \left(\sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \right)^{5/2} + c \qquad (1) \end{aligned}$$

(2) Ricordiamo che $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, quindi poniamo $x = \sinh t$

$$I = \int \frac{\sinh^2 t}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}} \cosh t \, dt = \int \sinh^2 t \, dt.$$

Ora risolvendo per parti si ottiene che

$$\int \sinh^2 t \, dt = \frac{1}{2} (\cosh t \sinh t - t) + c.$$

Invertendo poi $x = \sinh t$ otteniamo $t = \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$ e perciò

$$I = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} - \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right] + c.$$

(3) Poniamo $x = 2 \cosh t$ quindi

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \frac{1}{4} \tanh t + c = \frac{1}{4} \frac{\sinh t}{\cosh t} + c = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + c$$

Esercizio 3. (1) Osserviamo che $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, poniamo quindi

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sin t}{2}$$

quindi $t = \arcsin(2x-1)$. In questo modo

$$I = \int \frac{2\cos t}{2\cos t}\, dt = t + c = \arcsin(2x-1) + c$$

(2) Osserviamo che

$$3x^2 + x + 2 = 3(x^2 + \frac{1}{3}x) + 2 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12},$$

Quindi poniamo

$$x + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{23}}{6}\sinh t.$$

Allora $dx = \frac{\sqrt{23}}{6}\cosh t\, dt$ e

$$t = \log\left[\sinh t + \cosh t\right] = \log\left[\sinh t + \sqrt{1 - \sinh^2 t}\right].$$

Sostituendo si ottiene

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{23}}{6}\cosh t\, dt}{\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{12}}\cosh t} = \frac{1}{\sqrt{3}}t + c.$$

Osservando che

$$t = \log\left[\frac{6x+1}{\sqrt{23}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{23}}\sqrt{3x^2+x+2}\right]$$

otteniamo:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left[\frac{6x+1}{\sqrt{23}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{23}}\sqrt{3x^2+x+2}\right] + c.$$