Soluzioni I

22/09/2003

Richiamo di Integrali

Esercizio 1. Si ricorda che $\int f'(x) = f(x) + c$, quindi:
(1) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$.
(2) $\int \cos x\, dx = -\sin x + c$.
(3) $\int x^\alpha\, dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \text{se } \alpha \neq -1, \\ \log|x| + c & \text{altrimenti.} \end{cases}$
(4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x + c$.
(5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{cotan} x + c$.
(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$.
(7) $\int a^x = \frac{a^x}{\log a} + c$.
(8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$.
(9) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$.

Esercizio 2. Gli integrali in questo esercizio sono del tipo $\int g(f(x))f'(x)\, dx$ e si risolvono ponendo $y = f(x)$, in questo modo l'integrale da risolvere diventa $\int g(y)\, dy$.
(1) Ponendo $y = 1 + x^2$ l'integrale diventa $\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\log|y| + c = \frac{1}{2}\log|1 + x^2| + c$.
(2) Ponendo $y = \log x$ l'integrale diventa $\int y\, dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\log^2 x}{2} + c$.
(3) Notiamo che $\frac{\tan^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, allora se pongo $y = \cos x$ l'integrale diventa $-\int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{y} + c = \frac{1}{\cos x} + c$.
(4) Pongo $y = e^x$ allora si ha che $\int \sin y\, dy = -\cos y = -\cos e^x$
(5) Ricordiamo che $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, quindi basta porre $y = \sin x$ in modo da ottenere $\int \frac{dy}{y} = \log|y| + c = \log|\sin x| + c$.
(6) Osserviamo che se moltiplichiamo il numeratore e il denominatore della funzione integranda per $\cos x$ otteniamo $\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}$. Allora se pongo $y = \tan x$ otteniamo, risolvendo l'integrale, che la soluzione è $\log|\tan x| + c$

Esercizio 3. (1) Spezziamo il numeratore in due parti e calcoliamo

$$4\int \frac{x}{x^2+3}\, dx + 3\int \frac{1}{x^2+3}\, dx = 2\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx + \int \frac{1}{(x/\sqrt{3})^2+1}\, dx.$$

Ponendo $y = x^2 + 3$ nel primo integrale e $y = x/\sqrt{3}$ nel secondo otteniamo $2\int \frac{1}{y}\,dy + \sqrt{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = 2\log|y| + \sqrt{3}\tan y + c = 2\log|x^2+3| + \sqrt{3}\tan(x/\sqrt{3}) + c$.
(2) Osserviamo che è possibile scrivere

$$\frac{4x+3}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{Ax + B - 3A}{(x-3)^2}.$$

Per il principio di Identità dei polinomi si ha che $A = 4$ e $B = 15$. Quindi ora basta risolvere

$$4\int \frac{dx}{x-3} + 15\int \frac{dx}{(x-3)^2} = 4\log|x-3| - 15\frac{1}{x-3} + c.$$

(3) In questo caso $\frac{4x+3}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$ e come nel punto precedente ricaviamo i valori $A = \frac{3}{2}$ e $B = \frac{5}{2}$. Allora il nostro integrale diventa

$$\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{3}{2}\log|x-3| + \frac{5}{2}\log|x+3| + c$$

Esercizio 4. Ricordiamo la formula di integrazione per parti:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

(1) Poniamo $g(x) = \log x$ e $f'(x) = 1$ allora

$$\int \log x = x\log x - \int 1\,dx = x(\log x - 1) + c.$$

(2) Sia $I = \int \sin^2 x\,dx$, poniamo $g(x) = \sin x$ e $f'(x) = \sin x$, allora

$$I = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx =$$

Ora $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ da cui

$$I = -\cos x\sin x + \int 1 - \sin^2 x\,dx = -\cos x \sin x + x + c - I,$$

quindi portando I dal secondo membro al primo otteniamo

$$2I = -\cos x \sin x + x \Rightarrow I = \frac{-\cos x \sin x + x}{2} + c.$$

(3) Poniamo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$ allora

$$I = \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

Per riguarda l'integrale al secondo membro poniamo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$ allora

$$I = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \, dx \right) = e^x (x^2 - 2x + 2) + c.$$

Esercizio 5. (1) Poniamo $t = \tan x/2$, $x = 2 \arctan t$ dunque $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Sfruttando le regole di bisezione si ottiene che $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Quindi

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c.$$

(2) Poniamo $x = t^6$ e quindi $dx = 6t^5 dt$. Allora

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \, dx = 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2} \, dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} \, dt.$$

Ricordiamo il prodotto notevole $t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$. Quindi

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$$

Allora

$$6 \int \frac{t^3}{t+1} \, dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log |t+1| \right) + c.$$

Ricordaniamo ora che $t = \sqrt[6]{x}$, quindi il nostro integrale diventa

$$2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \log |t+1| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \log |\sqrt[6]{x} + 1|$$

(3) Poniamo $x = \sqrt{2} \sin t$, allora $dx = \sqrt{2} \cos t dt$. Allora

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \int \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sqrt{2 - 2\sin^2 t}} \, dt = \int 1 \, dt = t + c = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$