AM2 2003-2004: I ESONERO

ESERCIZIO 1 Dire quali dei seguenti integrali esistono

$$(i) \quad \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{2x^4 - 3x^2 + 1} \qquad (ii) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} dx \qquad (iii) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x^2(1+\log^2 x)} dx$$

RISPOSTA (sbarrare la casella a destra dell'affermazione giusta):

(i) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

(ii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

(iii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

ESERCIZIO 2 Indicare il raggio di convergenza r di

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(2^n+1)} \qquad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2+\cos n} \qquad (iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n!!}{(n!)^2} x^n$$

e determinare il comportamento della serie (iii) in $x = r, x = -r$.

RISPOSTA

(i) $r =$ (ii) $r =$ (iii) $r =$

(iii) converge in $x = r$ ◯ non converge in $x = r$ ◯

(iii) converge in $x = -r$ ◯ non converge in $x = -r$ ◯

ESERCIZIO 3 Calcolare, effettuando il cambio di variabile $\log^2 t = \tau$,

$$f(x) := \int_1^x \frac{\log^3 t + \log t^3}{t\sqrt{1+\log^4 t}} dt, \qquad x \geq 1$$

RISPOSTA: $f(x) =$

ESERCIZIO 4

(i) Determinare per quali α la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}$

converge totalmente/uniformemente, in $[0, +\infty)$.

(ii) Provare che

$$\int_1^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty, \quad \forall \alpha$$

(ii) Provare che

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty, \qquad \text{se e solo se} \qquad \alpha < 0$$

Tema 1. Siano $f_n \in C^1(I)$, I intervallo aperto. Se $f_n(x_0)$ converge per un $x_0 \in I$ e f_n' converge uniformemente ad una funzione g in I, allora f_n converge in I ad una $f \in C^1(I)$ con $f' = g$.

Provare tale affermazione ed illustrare con dei controesempi il carattere essenziale delle ipotesi.

Tema 2. Mostrare che se f é integrabile in $[0, +\infty)$ allora é integrabile in senso improprio in $[0, +\infty)$.

Mostrare con un controesempio che il viceversa é falso, in generale.

Problema . Dimostrare la formula di Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \left[\frac{2n!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} + \circ(1)$$

Suggerimento: Utilizzare le formule $S_{2n} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nt dt = \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\pi}{2}$, $S_{2n+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$, *e le diseguaglianze* $S_{2n-1} \geq S_{2n} \geq S_{2n+1}$

SOLUZIONI

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

(i) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste $\times$

perché il denominatore si annulla

(ii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste $\times$

Cambiando x in $\frac{1}{t}$, si ottiene $\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\ dx = \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{1} t^2 \sin t(-\frac{1}{t^2})\ dt$ che non ha limite per ϵ tendente a zero.

(iii) -esiste $\times$ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\frac{\sin x}{x^2(1+\log^2 x)}| dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x \log^2 x} < +\infty$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 (a_n indicherá il coefficente di x^n)

(i) $r = 6$ (ii) $r = 1$ (iii) $r = \frac{1}{16}$

In (i) e (ii) é $\lim_n a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{6}$, 1 rispettivamente. In (iii), $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(4n+2)(4n+4)} \to_n \frac{1}{16}$ e quindi $r = \frac{1}{16}$.

(iii) converge in $x = r$ ◯ non converge in $x = r$ $\times$

(iii) converge in $x = -r$ $\times$ non converge in $x = -r$ ◯

Usando le formule di Wallis e di Stirling: $a_n r^n = \frac{(4n)!!}{16^n\ (n!)^2} =$

$[\frac{(4n+1)\pi}{2}]^{\frac{1}{4}} \frac{(4n!)^{\frac{1}{2}}}{(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})^2\ 16^n}\ (1 + \circ(1)) = [2\pi(4n+1)]^{\frac{1}{4}}\ \frac{n^{2n+\frac{1}{4}}\ e^{-2n}}{n^{2n+1}\ e^{-2n}}\ (1+\circ(1)) =$

$= [2\pi(4+\frac{1}{n})]^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{2}}\ (1+\circ(1))$ e quindi la serie diverge in $x = r$. Segue anche che $a_n r^n$ decresce, e quindi la serie converge in $x = -r$, per Leibnitz.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

$$f(x) = \frac{1}{2} [\sqrt{1+\log^4 x} - 1 + 3 \log(\log^2 x + \sqrt{1+\log^4 x})]$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}$ converge uniformemente in $(0,+\infty)$ se e solo se $\alpha < -1$.

La convergenza é totale in $[\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0$ e per ogni α:

$$x \geq \delta \Rightarrow |\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}| \leq \frac{1}{\delta(1+n^2\delta^2)}$$

La convergenza é totale in $(0,\delta]$ se $\alpha < -1$: $|\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}| \leq n^\alpha |\frac{\sin n^\alpha x}{n^\alpha x}| \leq n^\alpha$

La convergenza non é uniforme (in $(0,\delta]$) se $\alpha \geq -1$:

$-1 \leq \alpha \leq 0 \quad \Rightarrow \quad S_N(\frac{1}{N}) := \sum_{n=1}^{N} n^\alpha \frac{\sin n^\alpha N^{-1}}{n^\alpha N^{-1}(1+n^2N^{-2})} \geq \frac{\sin 1}{2} \sum_{n=1}^{N} n^\alpha \to_{N\to+\infty} +\infty$

$\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n |\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}|_{x=\frac{1}{n^\beta}} = \lim_n n^\alpha$ se $\beta > \max\{\alpha, 1\}$

(ii) Dalla uniforme convergenza in $[\delta,+\infty)$: $\int_1^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^\infty \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}dx$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+n^2x^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^\infty \frac{dt}{t^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < +\infty$

(iii) Come sopra: $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}dx$. Si tratta quindi di provare: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty$, se e solo se $\alpha < 0$. E infatti:

$\alpha < 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}\,dx = \int_0^n \frac{|\sin n^{\alpha-1}t|}{t(1+t^2)}dt \leq \int_0^n \frac{n^{\alpha-1}}{1+t^2}dt \leq \frac{\pi}{2}n^{\alpha-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} < +\infty$

$0 \leq \alpha \Rightarrow \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}\,dx \geq \int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}\,dx \geq n^{\alpha-1} \int_0^{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \frac{\sin n^{\alpha-1}t}{n^{\alpha-1}t}\frac{dt}{1+t^2} \geq$

$$\geq \frac{\sin 1}{n^{1-\alpha}} \int_0^{n^{1-\alpha}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sin 1}{n^{1-\alpha}} \arctan n^{1-\alpha} \geq \frac{\sin 1}{2n^{1-\alpha}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} = +\infty$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA Da $\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \geq \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \geq 1$ e

$\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$, $\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 (2n+1)\frac{\pi}{2}$ segue

$\frac{2n+1}{2n} \geq \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 (2n+1)\frac{\pi}{2} \geq 1$ e quindi $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 (2n+1)\frac{\pi}{2} = 1 + O(\frac{1}{n})$.

Formula di Taylor con resto integrale . Sia $\varphi \in C^\infty([0,1])$. Allora, per ogni naturale n, si ha

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)dt$$

Teorema 2. Sia f_n una successione di funzioni integrabili in un intervallo limitato $[a,b]$. Se f_n converge uniformemente ad f in $[a,b]$, allora f é integrabile in $[a,b]$ e

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n \;=\; \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b) : \quad f^{(n)}(x_0) \;=\; g^{(n)}(x_0) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f \equiv g \;\; \text{in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : f \equiv g$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, e quindi $b' := \sup\{x < b : \ f(t) = g(t) \ \ \forall t \in [x_0, x]\} \geq x_0 + \delta > x_0$. Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b')$, $\forall n$. Se fosse $b' < b$, sarebbe allora, per continuitá, $f^{(n)}(b') = g^{(n)}(b')$ $\forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Teorema 3. Siano $f_n \in C^1(I)$, I intervallo aperto. Se $f_n(x_0)$ converge per un $x_0 \in I$ e f_n' converge uniformemente ad una funzione g in I, allora f_n converge in I ad una $f \in C^1(I)$ con $f' = g$.

Sia f analitica in $(-r, r)$. Provare che

$$f^{(n)}(0) = 0 \;\; \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x) = 0 \;\; \forall x \in (-r, r)$$

4

5

6

7

Stabilire se $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^4}$, $x \in \mathbf{R}$, converge uniformemente/puntualmente in $\mathbf{R}$.