AM2 2003-2004: I ESONERO

ESERCIZIO 1 Dire quali dei seguenti integrali esistono

$$(i) \quad \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{3x^4 - 2x^2 + 1} \qquad (ii) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\ dx \qquad (iii) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x \log^2 x} dx$$

RISPOSTA (sbarrare la casella a destra dell'affermazione giusta):

(i) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

(ii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

(iii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

ESERCIZIO 2 Indicare il raggio di convergenza r di

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+2)} \qquad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+\cos^2 n} \qquad (iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(n!)^2}\, x^n$$

e determinare il comportamento della serie (iii) in $x = r, x = -r$.

RISPOSTA

(i) $r =$ (ii) $r =$ (iii) $r =$

(iii) converge in $x = r$ ◯ non converge in $x = r$ ◯

(iii) converge in $x = -r$ ◯ non converge in $x = -r$ ◯

ESERCIZIO 3 Calcolare, effettuando il cambio di variabile $\log^2 t = \tau$,

$$f(x) := \int_1^x \frac{\log^3 t - \log t}{t\sqrt{1+\log^4 t}}\, dt, \qquad x \in (0,1]$$

RISPOSTA: $f(x) =$

ESERCIZIO 4

(i) Determinare per quali α la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}$

converge totalmente/uniformemente, in $[0, +\infty)$.

(ii) Provare che

$$\int_1^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty, \quad \forall\alpha$$

(ii) Provare che

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty, \quad \text{se e solo se} \quad \alpha < 0$$

Tema 1. Sia f_n una successione di funzioni continue in un intervallo limitato $[a, b]$. Se f_n converge uniformemente ad f in $[a, b]$, allora f é integrabile in $[a, b]$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Provare tale affermazione ed illustrare con dei controesempi il carattere essenziale delle ipotesi.

Tema 2. Sia $\varphi \in C^\infty([0, 1])$. Provare che, per ogni naturale n, si ha

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)dt$$

Problema . Siano f, g analitiche in (a, b). Provare che

$$\exists\, x_0 \in (a, b) : \quad f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f \equiv g \ \text{in}(a, b)$$

Suggerimento: Provare che $b' := \sup\{x < b : \ f(t) = g(t) \ \ \forall t \in [x_0, x]\} \geq b$.

SOLUZIONI

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

(i) -esiste $\times$ -esiste, ma solo in senso improprio $\bigcirc$ -non esiste $\bigcirc$

perché il denominatore non si annulla mai, e $\frac{1}{3x^4-2x^2+1} = O(\frac{1}{1+x^4})$.

(ii) -esiste $\times$ -esiste, ma solo in senso improprio $\bigcirc$ -non esiste $\bigcirc$

Infatti $|\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$.

(iii) -esiste $\times$ -esiste, ma solo in senso improprio $\bigcirc$ -non esiste $\bigcirc$

Infatti $|\frac{\cos x}{x \log^2 x}| \leq \frac{1}{x \log^2 x}$ e $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x \log^2 x} < +\infty$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 (a_n indicherá il coefficente di x^n)

(i) $r = 3$ (ii) $r = 1$ (iii) $r = \frac{1}{4}$

In (i) e (ii) é $\lim_n a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}, 1$ rispettivamente. In (iii), $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2} \to_n \frac{1}{4}$ e quindi $r = \frac{1}{4}$.

(iii) converge in $x = r$ $\bigcirc$ non converge in $x = r$ $\times$

(iii) converge in $x = -r$ $\times$ non converge in $x = -r$ $\bigcirc$

Usando la formula di Stirling: $a_n r^n = \frac{(2n!}{4^n\ (n!)^2} = \frac{2n^{2n+\frac{1}{2}}\ e^{-2n}}{(n^{n+\frac{1}{2}}\ e^{-n})^2 4^n} (1 + \circ(1)) =$

$(\frac{2}{n})^{\frac{1}{2}} \quad (1 + \circ(1))$ e quindi la serie diverge in $x = r$.

Da ció segue anche che $a_n r^n$ decresce, da cui la convergenza in $x = -r$, per Leibnitz.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

$$f(x) = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + \log^4 x} - 1 - \log(\log^2 x + \sqrt{1 + \log^4 x})]$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}$ converge uniformemente in $(0,+\infty)$ se e solo se $\alpha < -1$.

La convergenza é totale in $[\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0$ e per ogni α:

$$x \geq \delta \Rightarrow |\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}| \leq \frac{1}{\delta(1+n^2\delta^2)}$$

La convergenza é totale in $(0,\delta]$ se $\alpha < -1$: $|\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}| \leq n^\alpha |\frac{\sin n^\alpha x}{n^\alpha x}| \leq n^\alpha$

La convergenza non é uniforme (in $(0,\delta]$) se $\alpha \geq -1$:

$-1 \leq \alpha \leq 0 \quad \Rightarrow \quad S_N(\frac{1}{N}) := \sum_{n=1}^{N} n^\alpha \frac{\sin n^\alpha N^{-1}}{n^\alpha N^{-1}(1+n^2N^{-2})} \geq \frac{\sin 1}{2} \sum_{n=1}^{N} n^\alpha \to_{N\to+\infty} +\infty$

$\alpha \ \geq \ 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n |\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}|_{x=\frac{1}{n^\beta}} = \lim_n n^\alpha$ se $\beta > \max\{\alpha, 1\}$

(ii) Dalla uniforme convergenza in $[\delta,+\infty)$: $\int_1^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx$
$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+n^2x^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < +\infty$

(iii) Come sopra: $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx$. Si tratta quindi di provare: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty$, se e solo se $\alpha < 0$. E infatti:

$\alpha < 0 \ \Rightarrow \ \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx = \int_0^n \frac{|\sin n^{\alpha-1} t|}{t(1+t^2)} dt \leq \int_0^n \frac{n^{\alpha-1}}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{2} n^{\alpha-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} < +\infty$

$0 \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx \geq \int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx \geq n^{\alpha-1} \int_0^{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \frac{\sin n^{\alpha-1} t}{n^{\alpha-1} t} \frac{dt}{1+t^2} \geq$

$$\geq \frac{\sin 1}{n^{1-\alpha}} \int_0^{n^{1-\alpha}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sin 1}{n^{1-\alpha}} \arctan n^{1-\alpha} \geq \frac{\sin 1}{2n^{1-\alpha}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} = +\infty$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA Dall'ipotesi segue che f e g hanno la stessa serie di Taylor in x_0 e quindi coincidono in un intervallo centrato in x_0, e quindi $b' > x_0$. Se fosse $b' < b$, e giacché per continuitá $f^(n)(x_0) = g^(n)(x_0)$ $\forall n \in \mathbf{N}$, sarebbe, come sopra, $f \equiv g$ in un intorno dstro di b', contraddicendo la natura di sup di b'.