AM2 2003-2004: I ESONERO

ESERCIZIO 1 Dire quali dei seguenti integrali esistono

$$(i) \quad \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{3x^4 - 4x^2 + 1} \qquad (ii) \quad \int_0^1 \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\ dx \qquad (iii) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x \log^2 x} dx$$

RISPOSTA (sbarrare la casella a destra dell'affermazione giusta):

(i) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

(ii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

(iii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste ◯

ESERCIZIO 2 Indicare il raggio di convergenza r di

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)} \qquad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+\sin^2 n} \qquad (iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n$$

e determinare il comportamento della serie (iii) in $x = r, x = -r$.

RISPOSTA

(i) $r =$ (ii) $r =$ (iii) $r =$

(iii) converge in $x = r$ ◯ non converge in $x = r$ ◯

(iii) converge in $x = -r$ ◯ non converge in $x = -r$ ◯

ESERCIZIO 3 Calcolare, effettuando il cambio di variabile $\log^2 t = \tau$,

$$f(x) := \int_1^x \frac{\log^3 t + \log t}{t\sqrt{1+\log^4 t}}\, dt, \qquad x > 1$$

RISPOSTA: $f(x) =$

ESERCIZIO 4

(i) Determinare per quali α la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}$

converge totalmente/uniformemente, in $[0, +\infty)$.

(ii) Provare che

$$\int\limits_1^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty, \quad \forall \alpha$$

(iii) Provare che

$$\int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty, \qquad \text{se e solo se} \qquad \alpha < 0$$

Tema 1. Sia f_n una successione di funzioni continue in un insieme E. Se f_n converge uniformemente ad f in E, allora f é continua in E.

Provare tale affermazione ed illustrare con dei controesempi il carattere essenziale delle ipotesi.

Tema 2. La somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza $r > 0$ é una funzione analitica in $(-r, r)$.

Provare tale affermazione e discutere la seguente:

$f \in C^\infty((-r, r)) \quad \Rightarrow \quad f \quad$ é analitica in $(-r, r)$

Problema Siano $f_n \in C([a, b])$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \quad \text{converge uniformemente in} \quad [a, b]$$

.

Suggerimento: provare che f_n *é Cauchy uniforme in* $[a, b]$.

SOLUZIONI

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

(i) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste $\times$

perché il denominatore si annulla

(ii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio $\times$ -non esiste ◯

Cambiando x in $\frac{1}{t}$, si ottiene $\int\limits_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\ dx = \int\limits_{\frac{1}{\epsilon}}^{1} t\sin t(-\frac{1}{t^2}\ dt \to_{\epsilon\to 0} \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$. Lo stesso procedimento dá $\int\limits_{0}^{1} |\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}|\ dx = +\infty$

(iii) -esiste ◯ -esiste, ma solo in senso improprio ◯ -non esiste $\times$

Infatti il denominatore ha uno zero di ordine uno in $x = 1$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 (a_n indicherá il coefficente di x^n)

(i) $r = 2$ (ii) $r = 1$ (iii) $r = \frac{1}{2}$

In (i) e (ii) é $\lim_n a_n^{\frac{1}{n}} = 2,\ 1$ rispettivamente. In (iii), $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{2n+1} \to_n \frac{1}{2}$ e quindi $r = \frac{1}{2}$.

(iii) converge in $x = r$ ◯ non converge in $x = r$ $\times$

(iii) converge in $x = -r$ $\times$ non converge in $x = -r$ ◯

Usando le formule di Wallis e di Stirling: $a_n r^n = \frac{(2n-1)!!}{2^n\ n!} =$ $(\frac{2(2n!)^2}{\pi(2n+1)})^{\frac{1}{4}}\ \frac{1+\circ(1)}{2^n\ n!} = (\frac{2}{\pi(2n+1)})^{\frac{1}{4}}\ \frac{(2n^{2n+\frac{1}{2}}\ e^{-2n})^{\frac{1}{2}}}{2^n\ n^{n+\frac{1}{2}}\ e^{-n}}\ (1+\circ(1)) = (\frac{4}{\pi n(2n+1)})^{\frac{1}{4}}\ (1+\circ(1))$

quindi la serie diverge in $x = r$. Segue anche che $a_n r^n$ decresce, e quindi la serie converge in $x = -r$, per Leibnitz.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[\sqrt{1+\log^4 x} - 1 + \log(\log^2 x + \sqrt{1+\log^4 x})]$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}$ converge uniformemente in $(0,+\infty)$ se e solo se $\alpha < -1$.

La convergenza é totale in $[\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0$ e per ogni α:

$$x \geq \delta \Rightarrow |\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}| \leq \frac{1}{\delta(1+n^2\delta^2)}$$

La convergenza é totale in $(0,\delta]$ se $\alpha < -1$: $|\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}| \leq n^\alpha |\frac{\sin n^\alpha x}{n^\alpha x}| \leq n^\alpha$

La convergenza non é uniforme (in $(0,\delta]$) se $\alpha \geq -1$:

$-1 \leq \alpha \leq 0 \quad \Rightarrow \quad S_N(\frac{1}{N}) := \sum\limits_{n=1}^{N} n^\alpha \frac{\sin n^\alpha N^{-1}}{n^\alpha N^{-1}(1+n^2N^{-2})} \geq \frac{\sin 1}{2} \sum\limits_{n=1}^{N} n^\alpha \to_{N\to+\infty} +\infty$

$\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n |\frac{\sin n^\alpha x}{x(1+n^2x^2)}|_{x=\frac{1}{n^\beta}} = \lim_n n^\alpha$ se $\beta > \max\{\alpha, 1\}$

(ii) Dalla uniforme convergenza in $[\delta,+\infty)$: $\int\limits_1^\infty \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_1^\infty \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx$

$\leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x(1+n^2x^2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^\infty \frac{dt}{t^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < +\infty$

(iii) Come sopra: $\int\limits_0^1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx$. Si tratta quindi di provare: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} < +\infty$, se e solo se $\alpha < 0$. E infatti:

$\alpha < 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx = \int\limits_0^n \frac{|\sin n^{\alpha-1} t|}{t(1+t^2)} dt \leq \int\limits_0^n \frac{n^{\alpha-1}}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{2} n^{\alpha-1}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} < +\infty$

$0 \leq \alpha \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx \geq \int\limits_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \frac{|\sin n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)} dx \geq n^{\alpha-1} \int\limits_0^{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \frac{\sin n^{\alpha-1} t}{n^{\alpha-1} t} \frac{dt}{1+t^2} \geq$

$$\geq \frac{\sin 1}{n^{1-\alpha}} \int\limits_0^{n^{1-\alpha}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sin 1}{n^{1-\alpha}} \arctan n^{1-\alpha} \geq \frac{\sin 1}{2n^{1-\alpha}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} = +\infty$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA $\forall N, p \in \mathbf{N}$: $|f_{N+p}(x) - f_N(x)| \leq$

$$|f_{N+p}(x) - f_{N+p-1}(x)| + \ldots + |f_{N+1}(x) - f_N(x)| \leq \sum_{n=N}^{N+p-1} \max_{x\in[a,b]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

se N é abbastanza grande. Dunque f_n é Cauchy uniforme in $[a,b]$.