**UNIFORME CONTINUITA'**

# 1 Esercizio

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Mostrare che $f$ é uniformemente continua.
Svolgimento:
Per ipotesi sappiamo che

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 :\ \forall x \geq M \quad |f(x) - l| < \epsilon,$$

ne segue che $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \geq M :\ |x - y| \leq \delta \quad |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < 2\epsilon$$

ossia $f$ é uniformemente continua in $[M, +\infty)$. Inoltre sappiamo che, per il Teorema di Heine-Cantor, $f$ é uniformemente continua in $[a, M]$. Rimane da esaminare il caso in cui $x \in [a, M], y \in [M, +\infty)$ e $|x - y| < \delta$. Poiché, in tal caso $|x - M| < \delta$ e $|y - M| < \delta$, risulta

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - M| + |M - f(y)| < 2\epsilon$$

come volevamo mostrare.

# 2 Esercizio

Mostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2 + 1}, \quad x \in [1, +\infty)$$

é uniformemente continua.
Svolgimento:
Per l'esercizio precedente basta osservare che la funzione proposta é continua e che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2 + 1} = 0$$

## 3 Esercizio

Sfruttando il fatto che se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua é tale che esistono due costanti $m, q \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx - q = 0$$

implica che $f$ é uniformemente continua, provare che la funzione

$$x + \frac{\sin x^2}{x}$$

é uniformemente continua nel suo insieme di definizione.
Svolgimento:
Mostriamo che é soddisfatta la proprietá richiesta ossia che $f$ ammette un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left( x + \frac{\sin x^2}{x} \right) \frac{1}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} x + \frac{\sin x^2}{x} - x = 0$$

da cui la retta di equazione $y = x$ é un asintoto obliquo per la funzione assegnata.

## 4 Teorema di estensione

$f$ é uniformemente continua in un insieme $A$ se e solo se é la restrizione di una funzione $\overline{f}$ uniformemente continua in $\overline{A}$.

## 5 Esercizio

Dire se la funzione

$$f(x) = x^2 \log \left( \frac{1 + x^2}{x^2} \right)$$

é uniformemente continua in

$$\begin{aligned} &a) \quad [1, +\infty) \\ &b) \quad (0, 1) \\ &c) \quad [1, 2] \end{aligned} \tag{5.1}$$

Risposta:
a) per l'esercizio 1, la funzione é uniformemente continua dato che

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \log\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = 1$$

b) per il Teorema di estensione la funzione é uniformemente continua essendo la restrizione della funzione

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ x^2 \log\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) \text{ in } (0,1) \\ \log 2 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor.
c) La funzione é uniformemente continua perché continua su unn compatto (Teorema di Heine-Cantor).

## 6 Esercizio

Mostrare che se $f$ é derivabile in $x_0$ con derivata prima limitata allora $f$ é uniformemente continua in $x_0$.
Svolgimento:
Poiché per ipotesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < c$$

ne segue che se $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(x_0)| < c\delta$$

basta dunque scegliere $\epsilon = c\delta$ per avere la tesi.

## 7 Proposizione

Una funzione uniformemente continua su un insieme limitato é limitata.

## 8 Esercizio

Mostrare che la funzione $\log x$ non é uniformemente continua in $(0,1)$ ma lo é in $[1, +\infty)$.
Svolgimento:

Per la proposizione precedente $\log x$ non é uniformemente continua in $(0,1)$ perché se per assurdo lo fosse sarebbe limitata in $(0,1)$ che é assurdo. La funzione $\log x$ é poi uniformemente continua in $[1,+\infty)$ perché ha derivata prima limitata in questo intervallo.

## 9 Esercizio

Mostrare con un controesempio che il viceversa dell'esercizio 3 non é vero, ossia che esistono funzioni definite su un intervallo $[a,+\infty)$ uniformemente continue ma che non ammettono asintoto obliquo.
Svolgimento:
La funzione $\log x$ dell'esercizio precedente é uniformemente continua in $[1,+\infty)$ ma non ammette asintoto obliquo.

## 10 Esercizio

Dire se la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

é uniformemente continua in

$$\begin{aligned} &a) \quad (-1,2) \\ &b) \quad (-1,1) \end{aligned} \tag{10.1}$$

Risposta:
a) non é uniformemente continua essendo $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.
b) per il Teorema di estensione é uniformemente continua essendo

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \text{ se } x=-1 \\ \frac{1}{x^2-4} \text{ in } (-1,1) \\ -\frac{1}{3} \text{ se } x=1 \end{cases}$$

uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor.

## 11 Esercizio

Dire se la funzione

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$$

é uniformemente continua in $(0,1]$.
Risposta:

Si, per il Teorema di estensione, dato che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

## 12 Esercizio

Dire se la funzione
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3+2}{x+1}}$$
é uniformemente continua in $[1, +\infty)$.
Risposta:
Si, per l'esercizio 3, dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

## 13 Teorema della farfalla

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Allora esistono due costanti $A, B > 0$ tali che
$$|f(x)| \leq A + Bx.$$

## 14 Esercizio

Mostrare che la funzione $f(x) = x^2$ non é uniformemente continua su $[0, +\infty)$.
Svolgimento:
Se per assurdo $x^2$ fosse uniformemente continua su $[0, +\infty)$ per il Teorema della farfalla devono esistere due costanti $A, B > 0$ tali che $|x^2| \leq A + Bx$ da cui
$$\frac{x^2}{Ax + B} \leq 1$$
e passando al limite per $x \to +\infty$ si trova l'assurdo.