# AM1b, a.a. 2003-2004 - Limiti di funzioni

Silvia Mataloni

8 marzo 2004

Calcolare i limiti seguenti

**1.** $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$,

**2.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$;

**3.** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{3x-2}{2x+3}-\frac{3x+2}{2x-3}\right)$,

**4.** $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$,

**5.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

**6.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

**7.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2-x}$

**8.** $\lim_{x\to 0}(1-\sin(x^2))$

**9.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

**10.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$,

**11.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3}$,

**12.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$,

**13.** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan x}$,

**14.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$,

**15.** $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}- \ frac1\tan x\right)$,

**16.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$,

**17.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$,

**18.** $\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\pi-x}$,

**19.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin x - cos x}$, **20.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin x - \cos x}$,

**21.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+x^2)}{x}$, **22.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{x}$,

**23.** $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x}$, **24.** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$,

**25.** $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - x}{1+x^2}$, **26.** $\lim_{x\to 0} \sin x \log x$,

Risposte:

**1** Poiché

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

il limite proposto vale $\frac{3}{2}$

**2** Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{2+x}+\sqrt{2}$ si trova che la funzione tende a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**3** Dando il mcm si ha

$$\frac{1}{x}\left(\frac{3x-2}{2x+3} - \frac{3x+2}{2x-3}\right) = \left(\frac{-26x}{4x^2-9}\right)$$

da cui segue che il limite é $\frac{26}{9}$.

**4** $\frac{1}{2}$.

**5** Sapendo che

$$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2) \tag{1}$$

, moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1$ si mostra che la funzione tende ad $\frac{1}{3}$.

**6** Procedendo come nell'esercizio precedente si vede che il limite proposto vale $\frac{2}{3}$.

**7** Procedendo come nell'esercizio **2** si trova il valore $-\frac{1}{2}$.

**8** 1.

**9** Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2}$$

segue che il limite vale $\frac{2}{3}$.

**10** Usando il limite notevole (2) il limite vale 1.

**11** Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

e moltiplicando e dividendo per $x$, segue che il limite vale 0.

**12** Il limite proposto non esiste in quanto si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sin x}{x} = -1$$

**13** 1.

**14** Per i limiti notevoli(2) e (3) il limite vale $\frac{1}{2}$.

**15**

$$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right) = \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

che tende a zero per (2) e (3).

**16** Sostituendo $y = \frac{\pi}{2} - x$ che tende a 0 per $x \to \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}{y} = \frac{\sin y}{y}$$

e per (2) il limite tende a 1.

**17** Usando (1)

$$\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x} =$$

$$= \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x}(1+\cos x+\cos^2 x)$$

da cui segue che il limite proposto tende a $\frac{3}{2}$ per (2) e (3).

**18** Sostituendo $y = \pi - x$ che tende a 0 per $x \to \pi$ si ha

$$\frac{1+\cos(\pi+y)}{y} = \frac{1-\cos y}{y}$$

per cui il limite e' 0 da (3).

**19** Per la nota formula

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{4}$$

il limite in questione e' uguale a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -(\cos x + \sin x) = -\sqrt{2}.$$

**20**

$$\frac{1-\tan x}{\sin x - \cos x} = \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\sin x - cosx}\right)$$

semplificando, il limite proposto e' uguale a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x} = -\sqrt{2}.$$

**21** Per il limite notevole (2) il limite tende a 1.

**22** Per il limite notevole (3) il limite tende a $\frac{1}{2}$.

**23**
$$\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{x}=\frac{1-\cos x-x\cos x}{x(1+x)}=$$
$$=\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{\cos x}{1+x}$$
che tende a $-1$ quando $x$ tende a 0.
**24**
$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
che tende a $\frac{1}{2}$ per (2) e (3).
**25** Osservando che
$$x^x=e^{x\log x}$$
e sfruttando il limite notevole
$$\lim_{x\to 0^+} x\log x=0 \tag{5}$$
il limite proposto tende a 1.
**26** Per i limiti (2) e (5) si ha
$$\sin x\log x=\frac{\sin x}{x}x\log x\to 0$$
quando x tende a 0.