AM1b, a.a. 2003-2004 - I Esonero

16 aprile 2004

1. Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+7}{5x}\right)^{1-x}$;

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$;

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n - 3^n}{4^n - 2^n}$;

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n}$;

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{(n^2)}}{n^3+1}$

Suggerimento: sfruttare il fatto che $2^{(n^2)} \geq 2^n$ essendo $n^2 \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

3. Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza:

a. $\begin{cases} a_1 = & 2 \\ a_{n+1} = & a_n \log_2 a_n \end{cases}$

b. $\begin{cases} a_1 = & \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = & a_n (\log_2 a_n)^2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a_1 = & \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = & \frac{(\log_2 a_n)^2}{a_n} \end{cases}$

4. Ricordando che la somma della progressione aritmetica é $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$$