AM1b - Teoria dei limiti, a.a. 2003/04
I Appello [Soluzioni]

Silvia Mataloni

16 aprile 2004

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

a. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x+7}{5x} \right)^{1-x}$;

b. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$;

c. $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Risposta: *a.* $e^{\frac{-7}{5}}$; *b.* 3; *c.* $e^{-\frac{1}{2}}$.

Svolgimento:
a.
Usando l'uguaglianza

$$\left(\frac{5x+7}{5x} \right)^{1-x} = \left(1 + \frac{7}{5x} \right)^{5x \frac{1-x}{5x}}$$

e il limite notevole

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{x} = e^{b}$$

si ottiene che il limite proposto é uguale a $e^{\frac{-7}{5}}$.
b.
Moltiplicando e dividendo per $1 + \cos x$ si ottiene

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \sin^2 x + \sin^2 x (1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

da cui segue che il limite proposto é uguale a 3.

c.

Si osservi che

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log\cos x}$$

e si tenga presente che

$$\frac{1}{x^2}\log\cos x = \frac{1}{2x^2}\log\left(1-\sin^2 x\right) = -\frac{1}{2}\frac{\log\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin^2 x}\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Ne segue che il limite in questione vale $e^{-\frac{1}{2}}$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n-3^n}{4^n-2^n}$;

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n}$;

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{(n^2)}}{n^3+1}$

Suggerimento: sfruttare il fatto che $2^{(n^2)} \geq 2^n$ essendo $n^2 \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Risposta: *a.* $+\infty$; *b.* 0; *c.* $+\infty$.

Svolgimento:

a.

Poiché

$$\frac{5^n-3^n}{4^n-2^n} = \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

il limite vale $+\infty$

b.

Dall'uguaglianza

$$\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n} = \frac{4}{\sqrt[3]{(n+4)^2}+\sqrt[3]{(n+4)n}+\sqrt[3]{n^2}},$$

passando al limite, si ottiene che la successione proposta tende a zero.

c.

Dato che $\displaystyle\frac{2^{(n^2)}}{n^3+1} \geq \frac{2^n}{n^3+1}$, passando al limite si ottiene che la successione tende a $+\infty$.

Esercizio 3. Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza:

a. $\begin{cases} a_1 = & 2 \\ a_{n+1} = & a_n \log_2 a_n \end{cases}$

b. $\begin{cases} a_1 = & \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = & a_n(\log_2 a_n)^2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a_1 = & \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = & \frac{(\log_2 a_n)^2}{a_n} \end{cases}$

Svolgimento:
a.
La successione coincide con la successione costante uguale a 2 come si mostra per induzione.
b.
Per induzione si puó provare che la succeione b. é la successione costante uguale a $\frac{1}{2}$.
c.
Ancora per induzione si mostra che la successione estratta $a_{2n} = 2$ mentre l'estratta $a_{2n+1} = \frac{1}{2}$ da cui segue che la successione non ammette limite.

Esercizio 4. Ricordando che la somma della progressione aritmetica é $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$$

Svolgimento: Per $n = 1$ l'uguaglianza e' vera come si verifica facilmente. Sia vera per n. Risulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \end{aligned} \tag{1}$$