FUNZIONI CONTINUE

1 Esercizio

Dire se le seguenti funzioni sono continue in 0:

$$x + \sin x \tag{1.1}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ 1 - x \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ se } x > 0 \\ 1 - x \text{ se } x \leq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Risposte:
(1.1) si perché le funzioni elementari sono continue e la somma di funzioni continue é continua.
(1.2) no perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$.
(1.3) si perché $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
(1.4) si perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$.
(1.5) si perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$.
(1.6) no perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

2 Esercizio

Le seguenti funzioni non sono definite per $x = 0$. Che valore bisogna dare a $f(0)$ affinché risultino continue?

$$\frac{x^2}{\sin x} \tag{2.1}$$

$$\frac{\sin 3x}{x} \tag{2.2}$$

$$\frac{x^2}{|x| \sin x} \tag{2.3}$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{x^2} \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{x^2} \tag{2.5}$$

Risposte:
(2.1) $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
(2.2) $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 3$.
(2.3) dato che non esiste il $\lim_{x\to 0} f(x)$ la funzione non si puó estendere con continuitá.
(2.4) $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
(2.5) dato che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ la funzione non si puó estendere con continuitá.

3 Esercizio

Dire se le seguenti funzioni sono continue, e in caso contrario classificarne le discontinuitá.

$$|x| \tag{3.1}$$

$$f(x) \begin{cases} \frac{x}{|x|} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

$$f(x) \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$[x]^2 - x^2 \tag{3.4}$$

$$\{x\} \tag{3.5}$$

Risposte:
(3.1) la funzione é continua.
(3.2) dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ la funzione presenta una discontinuitá di prima specie.
(3.3) dato che $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$ la funzione presenta una discontinuitá eliminabile.
(3.4) la funzione é continua in ogni intervallo $(a, a+1)$ con a intero e presenta discontinuitá di prima specie negli interi $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
(3.4) essendo $\{x\} = [x] - x$ come nell'esercizio precedente si trova che la funzione presenta discontinuitá di prima specie negli interi $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

4 Esercizio

Trovare i valori dei parametri a, b affinché la funzione seguente risulti continua.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ se } x < -\frac{\pi}{2} \\ a\cos x + b\sin x \text{ se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \sin x \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Risposta:
Posto

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \cos x = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} a\cos x + b\sin x$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x = \lim_{x \to 0^-} a\cos x + b\sin x$$

si trova $0 = b$ e $a = 0$