La formula di Stirling dimostrata in modo elementare

La formula di Stirling é una stima del rapporto $\frac{n!e^n}{n^n}$, precisamente si puó dimostare che

$$n! = n^n e^{-n}(L\sqrt{n} + \alpha_n)$$

dove $\alpha_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$ e L é una costante positiva. Con metodi non compresi nel corso di Analisi I modulo, si trova che $L = \sqrt{2\pi}$.

Lemma 1

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \tag{0.1}$$

Dimostrazione Dimostriamo la disuguaglianza di destra, quella di sinistra si prova in modo del tutto analogo. Sia $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \;\; x \in \mathbb{R}^+$. É immediato dedurre che:

$$e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; 1 < \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{0.2}$$

dove abbiamo applicato il logaritmo ad entrambi i membri. Quindi dimostreremo che $f(x) > 1 \; \forall x \in \mathbb{R}^+$ e cosí avremo provato la (0.1) con x al posto di n. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \;\; \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

e derivando la f (che é derivabile in tutto il suo insieme di definizione) abbiamo:

$$f'(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)} \;\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0. \tag{0.3}$$

Andiamo a calcolare la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ . \tag{0.4}$$

La (0.4) implica che $f'(x)$ é sempre strettamente crescente e da (0.3) sappiamo che tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi $f'(x)$ é ovviamente sempre minore del suo estremo superiore, che in queso caso coincide con il limite per $x \to +\infty$, quindi possiamo affermare che $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Ció implica che f é una funzione strettamente decrescente; inoltre tende asintoticamente ad 1, e non avendo minimi relativi, non puó far altro che mantenersi sempre *al di sopra* della retta $y = 1$. Questo conclude la dimostrazione di (0.2).

Lemma 2

$$n! = n^n e^{-n}(L\sqrt{n} + \alpha_n) \text{ con } \alpha_n \to 0^+.$$

Dimostrazione Definiamo le seguenti due successioni numeriche:

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}}, \quad b_n = \frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}}$$

ovviamente si ha $a_n < b_n$. Inoltre a_n é strettamente crescente, infatti:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}(n+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{n!e^n}{n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e\, n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^n(n+2)^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= a_n \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}} > a_n$$

l'ultima disuguaglianza deriva dal Lemma 1.
Analogamente si dimostra che b_n é strettamente decrescente:

$$b_{n+1} = b_n \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} < b_n,$$

di nuovo l'ultima disuguaglianza é conseguenza del Lemma 1.
A questo punto abbiamo che

$$\frac{e}{\sqrt{2}} = a_1 < .... < a_{n-1} < a_n < b_n < .... < b_1 = e, \tag{0.5}$$

essendo a_n crescente e limitata superiormente, esiste $\lim_{n\to\infty} a_n := L_1$, ed essendo b_n decrescente e limitata inferiormente, esiste $\lim_{n\to\infty} b_n := L_2$. D'altra parte si ha che

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \to L_2 \cdot 1 \text{ per } n \to \infty,$$

quindi $L_1 = L_2 := L$. Dalla relazione tra le due successioni deduciamo che $(*)$ $a_n < L < b_n$, in particolare esiste una successione $\varepsilon_n \to 0$ tale che

$$\frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}} = (L + \varepsilon_n) \;\Leftrightarrow\; \frac{n!e^n}{n^n} = L\sqrt{n} + \varepsilon_n\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow n! = n^n e^{-n}(L\sqrt{n} + \varepsilon_n\sqrt{n}) = n^n e^{-n}(L\sqrt{n} + \alpha_n).$$

Infine abbiamo anche un'informazione sia sul fatto che α_n tende a zero, sia sulla velocitá con cui tende a zero. Infatti da $(*)$ deduciamo che

$$\frac{n!e^n}{n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}} < L < \frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}} = L + \varepsilon_n \;\Rightarrow$$

$$L\sqrt{n} < \frac{n!e^n}{n^n} < L\sqrt{n+1}.$$

Quindi

$$0 < \varepsilon_n\sqrt{n} = \frac{n!e^n}{n^n} - L\sqrt{n} < L\sqrt{n+1} - L\sqrt{n} = L\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

$\square$

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$F(x) = (x+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \;\; x \in \mathbb{R}^+, \;\; 0 \le \alpha < 1.$$

Studiare il grafico della F al variare del parametro α, in particolare osservare cosa succede per $\alpha < \frac{1}{2}$ e $\alpha \ge \frac{1}{2}$.