SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE SERIE NUMERICHE

Riassumiamo i principali criteri di convergenza a nostra disposizione:

CRITERI PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Criterio del confronto:
siano $a_n \geq 0, \ b_n \geq 0$, allora, se

$$\exists \overline{n}: \ a_n \leq b_n \ \forall n > \overline{n}$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

quindi se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Criterio della radice n-sima:
se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, se il limite é uguale ad 1 non si puó concludere nulla.

Criterio del rapporto:
se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, se il limite é uguale ad 1 non si puó concludere nulla.

Criterio del rapporto asintotico:
siano $a_n \geq 0, \ b_n > 0$, allora, se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ segue che:

(i) caso $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge,
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.
In altre parole le due serie hanno lo stesso comportamento.

(ii) caso $l = 0$:
$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente;

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergente;

(iii) caso $l = +\infty$:
$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente;
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente.

CRITERI PER SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNATO

Criterio di Leibniz:
Se $a_n \geq 0$, é decrescente e $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge.

CRITERI PER SERIE DI SEGNO QUALUNQUE
Criterio dell'assoluta convergenza:(ovvero: se la serie cambia segno l'unico modo per studiarla e' mettere i valori assoluti...)
Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, allora converge anche $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right|$.

Esercizio 1

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x-10}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$
Usando il criterio della rdice n-sima troviamo che la serie converge assolutamente (perché per applicare questo criterio dobbiamo inserire il modulo e quindi si studia la convergenza assoluta!) se $\left|\frac{3x-10}{2}\right| < 1$ e risolvendo si trova l'intervallo $x \in (\frac{8}{3}, 4)$. Possiamo provare a verificare se c'é convergenza semplice negli estremi. Per $x = \frac{8}{3}$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ che converge per il criterio di Leibniz (si veda l'esercizio 2), e per $x = 4$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi}{x-2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$
Osserviamo innanzitutto che $\cos n\pi = (-1)^n$. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Si ottiene che la serie converge assolutamente se $\left|\frac{1}{x-2}\right| < 1$, quindi per $x > 3$ e $x < 1$. Se $x = 1$ si ottiene la serie armonica, che diverge, se $x = 3$ si ottiene $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ che converge per il criterio di Leibniz.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x + 4)^n$, $x > 0$
Di nuovo studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Risolvendo la disequazione $|\ln x + 4| < 1$ segue che la serie converge assolutamente per $x \in (e^{-5}, e^{-3})$. Non si ha convergenza semplice negli estremi.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x} + \frac{3}{5}\right)^n$
Dal criterio della radice segue che si ha convergenza assoluta se $\left|e^{-x} + \frac{3}{5}\right| < 1$, quindi per $x > -\ln\frac{2}{5}$. Se $x = -\ln\frac{2}{5}$ si ottiene $\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n$ che diverge. Quindi non si ha convergenza semplice dove non c'é quella assoluta.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{x^2-2} - 2\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$
Dal criterio della radice segue che si ha convergenza assoluta se

$|e^{x^2-2} - 2| < 1$, da cui si ha $x \in (-\sqrt{2+\ln 3}, -\sqrt{2}) \cup x \in (\sqrt{2}, \sqrt{2+\ln 3})$. Per $x = \pm\sqrt{2}$ si ha anche convergenza semplice.

Esercizio 2

In questa serie di esercizi si fa uso del criterio di convergenza di Leinbiz per serie a segni alterni. Le ipotesi da verificare sono: data una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e se a_n é decrescente, allora la serie converge.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$
$a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$ é decrescente perché il logaritmo é crescente e tende a zero perché $\lim_{n\to\infty} \ln n = 0$ quindi la serie converge.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{e^n+3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n+3n}$.
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n+3n} = 0$, $e^n + 3n > 0$ e $\frac{1}{e^n+3n} > \frac{1}{e^{n+1}+3(n+1)}$ cioé é decrescente.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-20n+2}$
Il polinomio $n^2 - 20n + 2$ é crescente in n solo da un certo n in poi, peró possiamo comunque usareil criterio di Leibniz perché comunque l'importante é la crescenza per n grande. Infatti

$$n^2-20n+2 < (n+1)^2-20(n+1)+2 = n^2+2n+1-20n-20+2 \Longleftrightarrow 2n > 19 \Longleftrightarrow n > 10.$$

Quindi possiamo usare il criterio, perche' si ha decrescenza e ovviamente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-20n+2} = 0$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)}{n} \cdot \ln n$
Osserviamo che $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = (-1)^n$ quindi, sapendo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \to 0$, verifichiamo la decrescenza:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln n}{n} \Longleftrightarrow n\ln(n+1) < (n+1)\ln n \Longleftrightarrow \ln(n+1)^n < \ln n^{n+1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Longleftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$$

l'ultima affermazione é vera perché $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$.

Esercizio 3

(i) Usare il criterio della radice ennesima. La serie converge per $x \neq 0, x \neq -\frac{1}{n}$.
(ii) Confronto asintotico con $n^{\frac{3}{2}}$, la serie converge per $x > 0$.
(iii) Criterio del rapporto (con i moduli!!), la serie converge per $|x| < 1$.
(iv) $\frac{x^{2n}}{n}$ é una serie geometrica di ragione x^2 (a parte il denominatore, che ,del resto, non influisce sull'andamento della serie). Converge per $x < 1$. D'altra parte $\frac{n^{2x}}{x}$, a parte il denominatore, che é una costante, é una serire armonica generalizzata, converge per $2x < -1$, pertanto per $x < -\frac{1}{2}$. Tutta la serie converge per $-1 < x < -\frac{1}{2}$.

(v) Criterio della radice ennesima. La serie converge assolutamente per $\frac{1}{\log x}^2 < 1$ ovvero $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$.
(vi) Confronto asintotico con $n^{\frac{4}{3}}$, la serie converge per $x > 0$.
(vii) Abbiamo una serie geometrica di ragione

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (2a + 1),$$

quindi abbiamo convergenza se $\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (2a+1)\right| < 1$. Tenendo conto che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ *crescendo*, si ha:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (2a + 1)\right| < e|2a + 1| < 1 \iff -\frac{1}{e} < 2a + 1 < \frac{1}{e} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{e}\right) < a < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right).$$

$(viii)$ Osserviamo che

$$\left|\frac{x + \sin\frac{x}{n}}{n^x}\right| < \frac{|2x|}{n^x},$$

quindi, sapendo che la serie armonica generalizzata $\frac{1}{n^x}$ converge se $x > 1$, la nostra serie converge assolutamente se $x > 1$. Converge anche se $x = 0$.