PRIMO ESONERO DI AM1A
6 novembre 2003

Esercizio 1.
Trovare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \left\{ x = 3 + \frac{1}{n^{\alpha-2}}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}$$

E' fondamentale osservare subito che bisogna distinguere 3 casi:

$$\alpha \in (0,2),\ \alpha = 2,\ \alpha > 2$$

dato che la frazione $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$ cambia comportamento con α che varia in questi tre insiemi.

Primo caso: $\alpha \in (0,2)$: l'esponente é negativo, quindi n passa al numeratore. L'isieme pertanto non sará limitato superiormente e il sup quindi sará $+\infty$. Dimostriamo che l'insieme é illimitato:

$$\forall\ M > 0, \exists x \in A : x > M$$

ovvero

$$\forall M > 0 \exists n \in \mathbf{N} : 3 + \frac{1}{n^{\alpha-2}} > M \Leftrightarrow$$

$$n^{2-\alpha} > M - 3 \Leftrightarrow n > (M-3)^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

L'estremo inferiore in questo caso é un minimo, infatti 4 appartiene all'insieme (si ottiene per $n = 1$) ed é un minorante:

$$3 + n^{2-\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow n^{2-\alpha} \geq 1 \text{ vero } \forall n \in \mathbf{N}.$$

Secondo caso: $\alpha = 2$: l'insieme é costituito dal solo punto 4, quindi massimo e minimo coincidono. Terzo caso: $\alpha > 2$. Adesso n rimane al denominatore, pertanto il massimo si ottiene per $n = 1$, quindi max A= 4. Infatti $3 + \frac{1}{n^{\alpha-2}} \leq 4$. Infine l'inf di questo insieme, per $\alpha > 2$, é 3. Proviamo che 3 é un minorante:

$$3 + \frac{1}{n^{\alpha-2}} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{n^{\alpha-2}} > 0$$

e che é il massimo dei minoranti:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < 3+\varepsilon \Leftrightarrow 3+\frac{1}{n^{\alpha-2}} < 3+\varepsilon \Leftrightarrow n^{2-\alpha} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$\Box$

Esercizio 2.

Dimostrare che il seguente insieme ha un solo punto di accumulazione (trovarlo e provare che é di accumulazione):

$$B = \left\{ x = 2 + \frac{1 + 2 \cdot (-1)^{n-1}}{n^2}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

I punti dell'insieme si ottengono sommando a 2 la quantitá $\frac{1+2\cdot(-1)^{n-1}}{n^2}$, che in modulo diventa sempre piú piccola e cambia segno a seconda che n sia pari o dispari. Pertanto i punti si accumulano vicino a 2, dimostriamolo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in B : x \in I(2, \varepsilon), \ x \neq 2$$

ovvero:

$$\left| 2 + \frac{1 + 2 \cdot (-1)^{n-1}}{n^2} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1 + 2 \cdot (-1)^{n-1}}{n^2} \right| < \varepsilon$$

maggioriamo la quantitá nel modulo con qualcosa di segno costante, per liberarci del valore assoluto e svolgere la disequazione:

$$\left|\frac{1+2\cdot(-1)^{n-1}}{n^2}\right| < \frac{3}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Provare inoltre che l'insieme contiene solo punti isolati. Il generico punto x di B é isolato. Infatti, scegliendo r minore della quantitá

$$\min\left\{\left|2+\frac{1+2\cdot(-1)^{n-1}}{n^2}-\left(2+\frac{1+2\cdot(-1)^{n-3}}{(n-2)^2}\right)\right|,\right.$$
$$\left.\left|2+\frac{1+2\cdot(-1)^{n-1}}{n^2}-\left(2+\frac{1+2\cdot(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}\right)\right|\right\}$$

otteniamo un intorno di x nel quale non cadono altri punti di B. Osserviamo che abbiamo considerato i "vicini" di destra e sinistra del generico punto $x \in B$. Essi si ottengono cambiando il parametro n con $n-2$ e $n+2$, visto che i punti dell'insieme cadono alternativamente a destra e a sinistra di 2, a seconda che l'indice sia pari o dispari. Quindi non avrebbe senso considerare, come d'abitudine, gli indici $n, n-1, n+1$, bisogna andare di due in due!! ◫

Esercizio 3.
Dimostrare per induzione che

$$\sum_{h=0}^{n-1}(h+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Per semplificare i conti osserviamo che, con il cambiamento di parametro $h+1=k$, otteniamo la scrittura piú familiare:

$$\sum_{k=1}^{n}(k)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Verifichiamo che P_1 é vera: $\sum_{k=1}^{1}(k)^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ (si ottiene $1 = 1$). Assumiamo per ipotesi la P_n e proviamo la P_{n+1}:

$$P_{n+1}: \sum_{k=1}^{n+1}(k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k)^2 + (n+1)^2 = \text{ (per ipotesi ind.)}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

$\square$

Esercizio 4.

Trovare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$C = \left\{ x = \frac{7-2n}{n} + 5, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Riscriviamo gli elementi come $\frac{7}{n} + 3$, quindi: per $n = 1$ otteniamo che 10 é il massimo, infatti $\frac{7}{n} + 3 \leq 10 \forall\ n \geq 1$. Riguardo all'estremo inferiore, osserviamo che 3 é un minorante, infatti:

$$\frac{7}{n} + 3 > 3 \forall\ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

Infine 3 é il massimo dei minoranti:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : \frac{7}{n} + 3 < 3 + \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon}.$$

$\square$

Esercizio 5.

Dare la definizione di punto di accumulazione di un insieme di numeri reali.

Dato $A \subset \mathbb{R}$, x si dice di accumulazione per A se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ I(x, \varepsilon)$ tale che in I cade almeno un punto di A diverso da x.

Enunciare il principio di induzione.

Sia $\{P_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una famiglia di proposizioni. Se:

$$P_1 \text{ é vera e } P_n \Rightarrow P_{n+1} \forall n \in \mathbf{N}$$

allora P_n é vera per ogni n naturale.

Dare la definizione di: sezione di $\mathbb{R}$, di elemento separatore ed enunciare l'assioma di Dedekind.

Una sezione di $\mathbb{R}$ é una coppia di insiemi A, B tali che $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$, e $\forall a \in A$, $b \in B$, si ha $a < b$. Un numero $c \in \mathbb{R}$ si dice elemento separatore per una sezione (A, B) se $a \leq c \leq b\ \forall a \in A, b \in B$. Infine l'assioma di continuitá di Dedekind asserisce che in $\mathbb{R}$ ogni sezione ammette un elemento separatore.