II esonero di AM1a - ANALISI MATEMATICA - soluzioni
8/01/2004

## ESERCIZIO 1

Calcolare il limite della seguente successione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n^2}} \sin\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$$

Osserviamo che

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} \to (e^{-2})^n \to 0$$

quindi , usando i limiti notevoli $\lim_{a_n\to 0} \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$ e $\lim_{a_n\to 0} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} \to \frac{1}{2}$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n^2}} \sin\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{2n^2}} \frac{\sin\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}}{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$\sqcap\!\!\!\sqcup$

## ESERCIZIO 2

Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione:

$$a_n = n^{\frac{2}{3}}\left(e^{2n} - e^{2n}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Osserviamo che , se $n_1 = 2 + 8k$, $\sin \frac{n_1 \pi}{4} \equiv 1$, se $n_2 = 4k$, $\sin \frac{n_2 \pi}{4} \equiv 0$, quindi $a_{n_1} \equiv 0$, e $a_{n_2} = n^{\frac{2}{3}} e^{2n} \to +\infty$. Pertanto il massimo limite é $+\infty$. Per provare che il minimo limite é 0 basta dimostrare che 0 é un minorante per la successione. E infatti

$$n^{\frac{2}{3}} \left( e^{2n} - e^{2n} \sin \frac{n\pi}{4} \right) \geq 0$$

dato $-1 \leq \sin x \leq 1$.

$\sqcap\!\!\!\sqcup$

**ESERCIZIO 3**

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3x+1}{x^2-1} \right)^{n+1} \quad \text{(al variare del parametro } x\text{)}$$

Siamo in presenza di una serie geometrica, che converge se il modulo della ragione, ovvero $\left|\frac{3x+1}{x^2-1}\right|$ é minore di 1. Quindi si deve risolvere la disequazione:

$$\left| \frac{3x+1}{x^2-1} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{3x+1}{x^2-1} < 1.$$

Svolgendo CORRETTAMENTE i calcoli si ottiene convergenza (assoluta) della serie per $x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 0) \cup (\frac{3\sqrt{17}}{2}, +\infty)$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{n^4-1}} \text{( usare il criterio del rapporto asintotico)}$$

Confrontando asintoticamente con $b_n = \frac{1}{n}$, si ha:

$$\frac{a_n}{b_n} = n \frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{n^4-1}} = \frac{n \log(e^n(\frac{1}{e^n}+1))}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}} = \frac{n^2 + n\log\left(\frac{1}{e^n}+1\right)}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}} =$$

$$\frac{n^2}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}+\frac{n\log\left(\frac{1}{e^n}+1\right)}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}\to 1+0$$

Poiché il rapporto tende a 1, la serie di partenza ha lo stesso andamento di $\sum\frac{1}{n}$, che diverge, pertanto la serie di partenza diverge. $\sqcap\!\!\!\!\sqcup$

**ESERCIZIO 4**

Calcolare il limite della seguente funzione:

$$\lim_{x\to 0}\log\left|\frac{2x-e^x+1}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\log\left|2-\frac{e^x-1}{x}\right|\to\log(2-1)=0.$$

$\sqcap\!\!\!\!\sqcup$

**ESERCIZIO 5**

Stabilire se esistono dei valori del parametro $a$ per i quali la seguente funzione é continua.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(ax)}{x} \text{ per } x\neq 0\\ \\ a^2 \text{ per } x=0\end{cases}$$

affinché la funzione sia continua si deve controllare che il limite in zero sia uguale al valore che la funzione assume in zero, ovvero $a^2$, pertanto, poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$$

si ha che $a=a^2\Leftrightarrow a=0,1$.

Enunciare il Teorema di Weierstrass per funzioni continue.....

Dare un esempio di funzione che é continua in un insieme limitato ma non é ivi limitata: si puó scegliere $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$.