

2. ESERCIZI SUI PUNTI DI ACCUMULAZIONE E TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE

Esercizio 1

Trovare i punti di accumulazione e i punti isolati dei seguenti insiemi:

$$(A) := \{x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$$

$$(B) := \{x = \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$$

$$(C) := \{x = \frac{n-1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$$

Esercizio 2

Dare un esempio di:

- (i) un insieme con infiniti elementi e senza punti di accumulazione;
- (ii) un insieme con infiniti elementi e un solo punto di accumulazione;
- (iii) un insieme che abbia un solo punto di accumulazione, tutti gli altri punti siano isolati e sia illimitato.

Esercizio 3

Dire se i seguenti insiemi sono aperti o chiusi, oppure né aperti né chiusi:

$$(i) \{x \in \mathbf{R}: 1 < |x - 2| < 3\};$$

$$(ii) \{x \in \mathbf{R}: x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\};$$

$$(iii) \{x \in \mathbf{R}: x^2 + 3x + 1 = 0\};$$

$$(iv) \{x \in \mathbf{R}: (x - 2)^2 \neq 0\}.$$

Esercizio 4

Dimostrare che ogni insieme $A \subset \mathbf{R}$ chiuso e limitato ha massimo e minimo.

Esercizio 5

Dimostrare che se un insieme $A \subset \mathbf{R}$ é limitato superiormente e $\sup A \notin A$, allora $\sup A$ é un punto di accumulazione per A .