Tutorato di AM1a

Topologia

Fabrizio Fanelli

Dire se sono distanze in $\mathbb{R}$ le seguenti espressioni :

1. $d_1(x,y) \equiv |x-y|^2$
2. $d_2(x,y) \equiv \begin{cases} 0 \text{ se } x = y \\ 1 \text{ se } y \neq y \end{cases}$
3. $d_3(x,y) \equiv |x+y|$

Soluzione. 1)È una distanza. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare considerate tutti i possibili casi: $x \neq y \neq z$; $x \neq y,\ y = z$; $x \neq y,\ x = z$; $x = y,\ x \neq z,\ y \neq z$.

Soluzione. 2)non verifica la disuguaglianza triangolare: per esempio prendete la distanza tra 1 e -1 che è maggiore della somma delle ditanze tra -1 e 0 e tra 0 e 1.

Soluzione. 3)Non è una distanza: non rispette la proprietà: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, infatti per per x=y la distanza è $|2x|$, che in generale è diversa da zero.

Trovare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi :

1. $I = \{(1,2)\}$
   Soluzione. $\overline{I} = [1,2]$.Infatti se $p \in I$ $\forall \epsilon > 0$ scelgo $i \in I$ cos:
   $i = p + \dfrac{\min\left(|1-p|, |2-p|, \epsilon\right)}{2}$, $i \in \{I \cap I(p,\epsilon)\} \setminus \{p\}$.
   Verifichiamo che anche 2 un punto di accumulazione per I. $\forall \epsilon > 0$ scelgo $j = 2 - \dfrac{\min\left(\epsilon, |2-1|\right)}{2}$, e sicuramente $j \in \{I \cap I(2,\epsilon)\} \setminus \{2\}$.
2. $L = \{(1,2) \cup \{3\}\}$
   Soluzione. $\overline{L} = [1,2]$

3. $M = \left\{1, 2, 3, \dfrac{10}{3}, \dfrac{20}{3}, 15\right\}$
Soluzione. $\overline{M} = \emptyset$

4. $N = \left\{\dfrac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{M} = 1$

5. $O = \left\{\dfrac{3n-1}{2n}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{O} = \dfrac{3}{2}$

6. $P = \left\{\dfrac{n^3}{n!}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{P} = 0$

7. $Q = \left\{\dfrac{n^2-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{Q} = \emptyset$

8. $R = \left\{\dfrac{\sqrt{n-1}}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{R} = 0$

9. $S = \left\{\dfrac{n+1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{S} = \emptyset$

10. $T = \left\{\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{T} = \dfrac{1}{2}$

11. $U = \left\{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3}{5n^2}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Soluzione. $\overline{U} = \emptyset$

12. $V = \left\{ \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3}{5n^4}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Soluzione. $\overline{V} = \dfrac{1}{20}$

13. $Z = \left\{ m + \dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$
Soluzione. $\overline{Z} = \{m : \; m \in \mathbb{N}\}$