Tutorato di AM1a

Disuguaglianze e Moduli

Fabrizio Fanelli

Dimostrare che :

$||a|-|b|| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$.

Soluzione. $||a|-|b|| \leq |a-b| \Leftrightarrow ||a|-|b||^2 \leq |a-b|^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2|ab| \leq a^2+d^2-2ab \Leftrightarrow |ab| \geq ab$.

Dimostrare che , se $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ **, risulta :**

1. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

2. $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

3. $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq abc(a+b+c)$

Soluzione. Utilizzate la nota formula: $a^2+b^2 \geq 2ab$

Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono soddifatte le seguenti disuguaglianze :

1. $\left|\frac{|x|-3}{x-3}\right| < 2$

   Soluzione. $\forall x \neq 3$

2. $|\cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

   Soluzione. $x \in (\pi/4, 3\pi/4) \cup (5\pi/4, 7\pi/4)$

3. $|x^2-3x+2| < x+1$

4. $\cos(2x)+\cos(x) < 0$

Soluzione. Utilizzare la formula: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, poi chiamare $\cos x = y$ e risolvere come una disuguaglianza di secondo grado. Ricordatevi di controllare alla fine le condizioni sul coseno di x e non fermarsi ad y.

5. $(4-\sqrt{6})\sin^2 x - \sqrt{6}\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x > 2\sqrt{2}\sin x$

   Soluzione. Trasformate $\cos^2 x = 1 - \sin^2$, poi chiamate $\sin x = y$ e procedete come l'esercizio precedente.

6. $4\sin x \tan x - \dfrac{3}{\cos x} < 0$

7. $\log(x+5) + \log(x-2) < \log(3x-1)$

   Soluzione. Ricordate di controllare le condizioni di esistenza del logaritmo: l'argomento deve essere strettamente maggiore di zero!

8. $2\log_{0.7}(x+1) - \log_{0.7}(x-1) > \log_{0.7}(3x-1)$

   Soluzione. Attenzione, la base del logartimo è minore di 1, allora $\log_{0.7} x > \log_{0.7} y \Leftrightarrow x < y$!

9. $1 + \sqrt{2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2} > \ln x$

   Soluzione. Ricordate di controllare anche le condizioni di esistenza della radice quadrata, oltre a quelle dei logaritmi!

10. $\sqrt{3}\sin x - \cos x + 1 < 0$

    Soluzione. Chiamate $\sin x = Y$ e $\cos x = X$, poi ricordatevi della prima relazione FONDAMENTALE della trigonometria: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ora potete fare una discussione grafica: avete la retta $\sqrt{3}Y - X + 1$ e la circonferenza $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.

11. $2^{1+x^2}\log_{10}(1+x^2) < 2^{10}$

    Soluzione. $2^{1+x^2}\log_{10}(1+x^2) < 2^{10} \Leftrightarrow \log_{10}(1+x^2)^{2^{(1+x^2)}} < \log_{10} 10^{2^{10}} \Leftrightarrow (1+x^2)^{2^{(1+x^2)}} < 10^{2^{10}} \Leftrightarrow (1+x^2) < 10$. Dimostrate la validità dell'ultimo passaggio.