AM1a - Analisi Uno, a.a 2003/2004
Prova scritta del 16/02/2004
[Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Calcolare gli eventuali punti di accumulazione del seguente insieme:

$$A = \left\{ x = 1 - \frac{3}{4^n} + \sin\frac{1}{n^2},\ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Poiché entrambe le frazioni tendono a zero, ci aspettiamo che 1 sia l'unico punto di accumulazione. Dimostriamolo, ovvero proviamo che $\forall\varepsilon > 0 \exists \overline{x} \in A : |\overline{x} - 1| < \varepsilon$. Quindi:

$$|1 - \frac{3}{4^n} + \sin\frac{1}{n^2} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow | - \frac{3}{4^n} + \sin\frac{1}{n^2}| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$| - \frac{3}{4^n} + \sin\frac{1}{n^2}| < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$\blacksquare$

ESERCIZIO 2

Calcolare il limite della seguente successione:

$$\lim_{n\to+\infty} n \frac{e^{\frac{\sin n^2}{n^2}} - 1}{\sin n^2} \log\left(|n \sin n|\right)$$

Riscriviamo la successione, facendo apparire dei limiti notevoli, in particolare useremo che $\lim_{a_n\to 0} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \to 0$.

$$n\frac{e^{\frac{\sin n^2}{n^2}}-1}{\sin n^2}\log\left(|n\sin n|\right)=\frac{e^{\frac{\sin n^2}{n^2}}-1}{\frac{\sin n^2}{n^2}}\cdot\frac{\log\left(|n\sin n|\right)}{n}\to 1\cdot 0=0$$

$\square$

ESERCIZIO 3

Studiare la convergenza della seguente serie al variare del parametro reale x:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)^{n+3}$$

Abbiamo una serie geometrica,che converge se la ragione, in modulo, è minore di 1, quindi se $\left|\frac{2\sin x+1}{2}\right|<1$ ovvero $-1<\sin x+\frac{1}{2}<1$. Quindi

$$\sin x<\frac{1}{2}\Rightarrow 2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi+2k\pi<x<(2k+1)\pi$$

mentre la seconda disequazione è sempre verificata. $\square$

ESERCIZIO 4

Calcolare il limite della seguente funzione:(riscriviamo il limite)

$$\lim_{x\to 3}(2+|x-3|)^{\frac{1}{|x-3|}}\frac{\sin(x-3)}{x^2-2x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(2+|x-3|)^{\frac{1}{|x-3|}}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x+1)}\to+\infty\cdot 1=+\infty$$

Abbiamo usato il fatto che $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}\to 1$ $\square$

ESERCIZIO 5

Stabilire per quale valore del parametro $a \in \mathbf{R}$ la seguente funzione è continua :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3x)-1}{x^2} & x < 0 \\ \\ a \quad x = 0 \\ \\ \frac{\sin(9x)}{2x} & x > 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(3x)-1}{x^2} = -\frac{9}{2}, \ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(9x)}{2x} = \frac{9}{2}.$$

Pertanto non è possibile trovare $a \in \mathbf{R}$ che renda la funzione continua in 0.