AL4 - Numeri Algebrici - A.A. 2003/2004

Valutazione "in itinere"

AVVERTENZE : *Svolgere il tema in classe, utilizzando al più un foglio protocollo (4 facciate) e scrivendo in modo chiaro e conciso.*

TEMA: *L'anello degli interi algebrici $\mathcal{O}_K$ in un campo quadratico K (cioè, K è un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$).*

ESERCIZIO. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-13})$.

(1) Determinare una base intera di $\mathcal{O}_K$. Calcolare il discriminante Δ_K (dell'anello degli interi) del campo quadratico K.

(2) Sia $\gamma := 1+\sqrt{-13}$. Calcolare il polinomio minimo $f_\gamma(X)$ ($\in \mathbb{Q}[X]$) dell'elemento $\gamma \in K$. Determinare se γ è un elemento irriducibile oppure no in $\mathcal{O}_K$.

Si ponga $I := 7\mathcal{O}_K + \gamma\mathcal{O}_K$ e $J := 7\mathcal{O}_K + \overline{\gamma}\mathcal{O}_K$.

(3) Mostrare che $I = 7\mathbb{Z}+\gamma\mathbb{Z}$ e $J = 7\mathbb{Z}+\overline{\gamma}\mathbb{Z}$. Calcolare il numero degli elementi dei seguenti anelli-quoziente:

$$\text{(a)} \ \frac{\mathcal{O}_K}{\gamma\mathcal{O}_K}; \quad \text{(b)} \ \frac{\mathcal{O}_K}{\overline{\gamma}\mathcal{O}_K}; \quad \text{(c)} \ \frac{\mathcal{O}_K}{I}; \quad \text{(d)} \ \frac{\mathcal{O}_K}{J}; \quad \text{(e)} \ \frac{\mathcal{O}_K}{7\mathcal{O}_K}.$$

(4) Stabilire se gli ideali I e J sono o non sono principali in $\mathcal{O}_K$. Calcolare esplicitamente l'ideale $I+J$ e verificare se l'ideale IJ coincide oppure no con l'ideale $I \cap J$.

(5) Determinare la fattorizzazione (unica) dell'ideale principale $7\mathcal{O}_K$ come prodotto di ideali primi di $\mathcal{O}_K$.

(6) Mostrare che l'ideale $P := 2\mathcal{O}_K + \gamma\mathcal{O}_K$ è un ideale primo non principale di $\mathcal{O}_K$ e che $2\mathcal{O}_K = P^2$. Stabilire quale relazione intercorre tra l'ideale P e l'ideale $Q := 2\mathcal{O}_K + \overline{\gamma}\mathcal{O}_K$ di $\mathcal{O}_K$.