11. Il problema del Matrimonio Stabile

Marco Liverani

Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea in Matematica
E-mail liverani@mat.uniroma3.it

Maggio 2014

Indice

Revisione del 11 maggio 2014.

1 Antefatto

Finalmente Capodanno! I genitori di Elena sono partiti per un viaggio in Patagonia lasciandole casa a completa disposizione. Insieme alle compagne di scuola, Francesca, Gaia ed Helga, Elena ha organizzato una festa per la fine dell'anno invitando i loro quattro compagni di classe preferiti. Alberto, Bruno, Carlo e Daniele non se lo sono fatto ripetere due volte! Passare la notte dell'ultimo dell'anno insieme, in una casa a completa disposizione, è un'occasione che non capita spesso... L'appuntamento convenuto è per le sette di sera a casa di Elena, per preparare insieme la cena e, *ufficialmente*, avere il tempo di intavolare un'impegnativa partita di Risiko che li dovrebbe accompagnare fino alle prime luci dell'alba.

Elena in cuor suo ha ben altri pensieri e non certo la conquista del mondo con i suoi carri armati colorati... D'altra parte non ha mai nascosto alle sue amiche di avere un debole per i ragazzi della classe invitati per festeggiare il Capodanno: il suo preferito è sicuramente Alberto. Anche le altre ragazze hanno le loro preferenze: Helga è follemente innamorata di Bruno, mentre Francesca e Gaia trovano entrambe che Carlo sia il più carino del gruppo.

Tra i ragazzi la situazione è più problematica: sia Alberto che Daniele preferiscono tra tutte Gaia, mentre Bruno e Carlo aspirano entrambi a conquistare la bella Francesca. Come spesso accade, però, nessuno dei quattro condivide con gli altri i propri sentimenti e tutti dichiarano di avere come unico vero obiettivo della serata la vittoria nella partita a Risiko.

Appena riunite a casa di Elena, le quattro amiche, apparentemente concordi, definiscono un patto di "non belligeranza": Elena dichiara per prima di voler mirare al proprio preferito, il bellissimo Alberto; Gaia la segue a ruota informando le amiche dell'intenzione di riuscire a fare breccia nel cuore di Carlo, al quale fino ad ora non aveva mai trovato l'occasione o il coraggio di dichiararsi. In questo gioco del tutto inaspettato a cui non erano preparate, sollecitate dalle amiche, anche Francesca ed Helga accettano di mostrare qualche interesse per Bruno e Daniele, rispettivamente, per "reggere il gioco" alle due intraprendenti amiche. In realtà, a pensarci bene, anche Francesca, come Gaia, tra i quattro ragazzi invitati alla festa preferisce Carlo e la povera Helga, un po' più timida delle altre, preferirebbe decisamente Bruno, il suo preferito, a Daniele, verso cui la stanno spingendo le tre amiche.

Elena è soddisfatta: la serata inizia sotto i migliori auspici, potrà dedicarsi al bellissimo Alberto, mentre le sue amiche rivolgeranno la propria attenzione ad altri, senza rivaleggiare con lei. Anche Gaia è soddisfatta, Carlo è da sempre il suo preferito e questa festa di Capodanno è l'occasione giusta per farsi notare dal suo amato! Chi invece non è soddisfatta per nulla è la povera Francesca: ma che razza di scherzo le hanno giocato quelle due "arpie" di Elena e Gaia... A lei Bruno non piace affatto, il suo preferito è Carlo e Gaia dovrà stare molto attenta, perché certamente lei non ha alcuna intenzione di farsi da parte!

Alle sette in punto suona il citofono: i ragazzi sono arrivati e dunque la serata può finalmente iniziare. I posti a tavola sono stati definiti da Elena, la padrona di casa, che ha messo i quattro ragazzi vicino alle "partner" che alle loro spalle lei e le sue amiche hanno deciso di assegnargli per la serata. La festa può avere inizio, ma a dispetto delle aspettative di Elena e Gaia, la serata sarà tutt'altro che tranquilla e le aspettano molte sorprese e veri e propri colpi di scena! Accade sempre così quando si fanno i conti senza l'oste... nessuna di loro si è preoccupata di tenere conto delle preferenze dei quattro amici: saranno disponibili ad accettare la situazione costruita "a tavolino" dalle ragazze?

2 Un modello matematico

Il problema che abbiamo appena introdotto e che approfondiremo nelle pagine seguenti, è un famoso problema di "matching" con interessanti applicazioni pratiche. Prende il nome di *problema del matrimonio stabile* (in inglese *stable marriage problem*) per la sua formulazione più nota in cui si richiede di definire una serie di "matrimoni" tra due gruppi di ragazzi e di ragazze, in modo tale che tali unioni siano al riparo da possibili "tradimenti" che possano mettere in crisi i matrimoni stessi. Siamo di fronte ad un problema di ottimizzazione combinatoria in cui le soluzioni ottime sono quelle caratterizzate da un criterio di *stabilità* che descriveremo più precisamente tra breve.

Consideriamo due insiemi composti da n elementi ciascuno: $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ e $Y = \{y_1,\dots,y_n\}$. Possiamo immaginare il primo insieme come un gruppo di ragazzi, mentre il secondo, di uguale cardinalità, può rappresentare un gruppo di ragazze.

Un *matching* M tra i due insiemi X e Y è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$, costituito da una famiglia di n coppie tale che ciascun elemento di X e ciascun elemento di Y appartengano ad una ed una sola coppia. In altri termini $M = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$ e per ogni $x \in X$ esiste un unico $y \in Y$ tali che $(x,y) \in M$ e viceversa. Ad esempio, se $X = \{a,b,c\}$ e $Y = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, un matching tra X e Y è $M = \{(a,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha)\}$.

Associamo ad ogni elemento $x_k \in X$ una n-pla ordinata costituita da una permutazione di tutti gli elementi di Y: $P(x_k) = (y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_n})$, dove con $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ abbiamo indicato una permutazione degli indici $(1,2,\dots,n)$. Analogamente, associamo a ciascun elemento $y_h \in Y$ una n-pla ordinata costituita da una permutazione di tutti gli elementi di X: $P(y_h) = (x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_n})$. Per ogni elemento $x_k \in X$ la permutazione $P(x_k)$ rappresenta una lista di preferenza degli elementi di Y per x_k; al tempo stesso la permutazione $P(y_h)$ rappresenta l'ordine di gradimento degli elementi di X per ciascun $y_h \in Y$. In altri termini ciascun elemento di X esprime una propria classifica sugli elementi di Y disponendoli in ordine decrescente di gradimento; lo stesso fanno gli elementi di Y esprimendo le proprie preferenze sugli elementi di X. Se $a \in X$, $\alpha,\beta \in Y$ e se a preferisce α a β, scriveremo $\alpha <_a \beta$, indicando così con il simbolo "$<_a$" la relazione d'ordine totale definita da a sugli elementi di Y.

Una volta introdotte le "liste di preferenza" degli elementi di un insieme rispetto agli elementi dell'altro insieme, tra le coppie di un matching può venirsi a creare una condizione di forte **instabilità**. Sia M un matching tra X e Y e siano (a,α), $(b,\beta) \in M$ due coppie del matching tali che β precede α nella lista di preferenza $P(a)$ di a e, al tempo stesso, a precede b nella lista di preferenza $P(\beta)$ di β; in simboli, utilizzando la notazione appena descritta, possiamo scrivere $\beta <_a \alpha$ e $a <_\beta b$. Allora a e β avrebbero l'interesse reciproco di "tradire" i propri compagni e mettere in crisi i propri "matrimoni" costituendo la nuova coppia (a,β) in cui ciascuno dei due membri, a e β, migliorerebbero la propria condizione. Il problema del matrimonio stabile mira a definire un matching in cui una simile condizione di instabilità non esista per nessuna coppia di elementi; in altri termini, dati i due insiemi X e Y si vuole costruire un matching tra membri dei due insiemi in modo tale da non creare una situazione di instabilità che, se il matching fosse un insieme di matrimoni, ne metterebbe presto in crisi qualcuno. Un matching si dice **stabile** se la condizione di instabilità non si verifica tra le coppie del matching.

Per comprendere meglio la condizione di stabilità, è opportuno osservare che la preferenza dei partner di a e β è del tutto irrilevante ai fini della stabilità; b potrebbe preferire β ad ogni altro elemento di Y ed anche α potrebbe preferire a ad ogni altro elemento di X, ma questo non renderebbe di per sé stabile il matching se invece a preferisce β e β preferisce a.

3 Un esempio

Ritorniamo alla nostra festa di Capodanno e indichiamo con X l'insieme dei ragazzi del gruppo: $X = \{\text{Alberto}, \text{Bruno}, \text{Carlo}, \text{Daniele}\}$; l'insieme Y è costituito invece dalle quattro ragazze: $Y = \{\text{Elena}, \text{Francesca}, \text{Gaia}, \text{Helga}\}$. Ciascun partecipante alla festa ha una propria preferenza sui membri dell'altro gruppo, che possiamo esprimere con delle liste ordinate di preferenza:

$$\begin{aligned}
P(\text{Alberto}) &= (\text{Gaia}, \text{Francesca}, \text{Helga}, \text{Elena}) \\
P(\text{Bruno}) &= (\text{Francesca}, \text{Elena}, \text{Gaia}, \text{Helga}) \\
P(\text{Carlo}) &= (\text{Francesca}, \text{Helga}, \text{Elena}, \text{Gaia}) \\
P(\text{Daniele}) &= (\text{Gaia}, \text{Elena}, \text{Helga}, \text{Francesca}) \\
P(\text{Elena}) &= (\text{Alberto}, \text{Bruno}, \text{Daniele}, \text{Carlo}) \\
P(\text{Francesca}) &= (\text{Carlo}, \text{Alberto}, \text{Daniele}, \text{Bruno}) \\
P(\text{Gaia}) &= (\text{Carlo}, \text{Bruno}, \text{Daniele}, \text{Alberto}) \\
P(\text{Helga}) &= (\text{Bruno}, \text{Alberto}, \text{Carlo}, \text{Daniele})
\end{aligned}$$

Il *matching* iniziale imposto da Elena e Francesca è il seguente:

$$M = \{(\text{Alberto}, \text{Elena}), (\text{Bruno}, \text{Francesca}), (\text{Carlo}, \text{Gaia}), (\text{Daniele}, \text{Helga})\}$$

Purtroppo le aspettative di Elena e Gaia che hanno progettato il matching con l'obiettivo essere in coppia con i loro ragazzi preferiti (Alberto e Carlo sono rispettivamente il primo elemento della lista di preferenza di Elena e di Gaia) sono destinate ad essere deluse, perché il matching è instabile: infatti Alberto preferisce Francesca e anche Francesca preferisce Alberto al proprio partner (Bruno). Durante la festa le schermaglie tra Alberto e Francesca sono tali da rendere evidente a tutti che Alberto non ha alcun interesse nei confronti di Elena ed anche Francesca non trova di propria soddisfazione essere in coppia con Bruno, per cui entrambi lasceranno i propri partner, Elena e Bruno, per mettersi insieme!

Ma le sorprese non finiscono qui: anche la coppia (Carlo, Gaia) è destinata a rompersi, dal momento che Carlo preferisce Francesca a Gaia e la stessa Francesca preferisce Carlo al suo attuale partner, Bruno.

Il problema si complica: bisogna trovare una combinazione delle coppie di ragazzi e ragazze che non presenti queste pericolose situazioni di instabilità. È necessario progettare un metodo, un algoritmo, per costruire almeno un matching stabile tra le coppie di ragazzi e ragazze.

Per comprendere la portata del problema è opportuno *contare* il numero di matching differenti che è possibile costruire tra due insiemi X e Y di n elementi ciascuno. Per costruire un matching abbiamo n possibilità differenti per scegliere il partner di $x_1 \in X$; una volta effettuata la scelta del partner di x_1, abbiamo $n-1$ scelte differenti per selezionare il partner di x_2, poi $n-2$ scelte per individuare il partner di x_3 e così via, fino alla scelta del partner di x_n che è priva di alternative, essendo condizionata dalle scelte dei partner degli elementi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Complessivamente quindi i matching differenti sono $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Nel caso degli otto amici dell'esempio precedente, i possibili matching diversi tra i ragazzi e le ragazze dei due gruppi, sono $4! = 24$. Esistono ben 24 modi diversi di accoppiare fra di loro gli otto amici.

Dunque il numero di matching possibili cresce con incredibile rapidità all'aumentare del numero degli elementi dei due insiemi. Ad esempio in una classe di 20 studenti, di cui 10 ragazzi e 10 ragazze, i possibili matching differenti sono $10! = 3.628.800$. Ci troviamo di fronte ad un problema di ottimizzazione combinatoria da trattare con attenzione: affrontare il problema con una strategia di calcolo esaustivo, costruendo una dopo l'altra tutte le possibili combinazioni degli elementi dei due insiemi, fino ad individuare un matching stabile, non è un metodo percorribile, perché il numero di matching da calcolare cresce esageratamente anche per piccole variazioni della cardinalità dei due insiemi.

È necessario progettare un algoritmo più efficiente, che riesca ad individuare una configurazione stabile limitandosi a calcolare solo alcuni matching, senza calcolarli tutti, uno dopo l'altro.

4 La (fallimentare) strategia delle separazioni successive

Fissato un matching iniziale qualsiasi, si può tentare di giungere ad un matching stabile rompendo due coppie che generano l'instabilità del matching e costruendo altre due coppie. Sia M è un matching tra X e Y, con $(x,y),(x',y') \in M$; supponiamo che $y' <_x y$ e $x <_{y'} x'$: x preferisce y' al proprio partner e al tempo stesso y' preferisce x al proprio partner. Dunque dal matching M si può passare al matching M' dividendo le coppie (x,y) e (x',y') e costruendo le due nuove coppie (x,y') e (x',y); la prima delle due coppie consente di sanare la situazione che in M costituiva una instabilità. Se il nuovo matching è instabile si individua la coppia di elementi che si preferiscono reciprocamente ai propri partner, si rompono le due coppie preesistenti e se ne creano altre due, dando luogo ad un nuovo matching. Il processo termina quando nessuna coppia (matrimonio) viene messa in crisi da una condizione di stabilità. Possiamo formalizzare questo procedimento nel seguente Algoritmo 1.

Algoritmo 1 SEPARAZIONISUCCESSIVE(X,Y)

Input: I due insiemi X e Y e le liste di preferenza complete
Output: Un matching stabile tra X e Y

1: Sia M un matching qualsiasi tra gli elementi di X e Y, ad esempio sia $M = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\}$
2: **fintanto che** il matching M non è stabile **ripeti**
3: Sia $x \in X, y \in Y$ una coppia che produce la condizione di instabilità su M; siano $(x,\tilde{y}),(\tilde{x},y) \in M$, con $y <_x \tilde{y}$ e $x <_y \tilde{x}$
4: Definisci il nuovo matching $M := M \setminus \{(x,\tilde{y}),(\tilde{x},y)\} \cup \{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\}$
5: **fine-ciclo**

Applichiamo il procedimento appena descritto all'esempio citato in precedenza. Per brevità indichiamo con le iniziali dei nomi gli otto ragazzi: $X = \{A,B,C,D\}$, $Y = \{E,F,G,H\}$. Le liste di preferenza di ciascun elemento dei due insiemi è stato definito nelle pagine precedenti.

Consideriamo il matching iniziale definito "a tavolino" da Elena e Gaia:

$$M^{(1)} = \{(\underline{A},E),(B,\underline{F}),(C,G),(D,H)\}$$

Il matching $M^{(1)}$ è instabile perché $F <_A E$ e $A <_F B$: Alberto preferisce Francesca ad Elena e Francesca preferisce Alberto a Bruno[1]. Dunque si possono eliminare dal matching le coppie (A,E) e (B,F) ed aggiungere le nuove coppie (A,F) e (B,E) ottenendo il nuovo matching

$$M^{(2)} = \{(A,\underline{F}),(B,E),(\underline{C},G),(D,H)\}$$

Anche il nuovo matching è instabile, perché Carlo e Francesca si preferiscono reciprocamente ai rispettivi partner, Gaia e Bruno: $F <_C G$ e $C <_F A$. Si produce quindi un nuovo matching eliminando

[1] Per semplificare la comprensione dell'esempio, sono stati sottolineati gli elementi delle coppie che verificano la condizione di instabilità del matching.

le coppie (A,F) e (C,G) ed aggiungendo le coppie (A,G) e (C,F) costruendo in questo modo un nuovo matching:

$$M^{(3)} = \{(A,\underline{G}),(B,E),(C,F),(\underline{D},H)\}$$

Il matching $M^{(3)}$ è instabile a causa della reciproca preferenza di Daniele e Gaia rispetto ai loro partner Alberto ed Helga: $G <_D H$ e $D <_G A$; eliminando le due coppie (A,G) e (D,H) da $M^{(3)}$ e aggiungendo le nuove coppie (A,H) e (D,G) si perviene finalmente ad un matching stabile:

$$M^{(4)} = \{(A,H),(B,E),(C,F),(D,G)\}$$

È opportuno osservare che il matching stabile, in generale, è caratterizzato da coppie che non corrispondono necessariamente all'ottimo per i due partner. Nell'esempio precedente Alberto è in coppia con Helga, sebbene Helga sia solo terza nella sua lista di preferenza e lo stesso Alberto non sia in cima alla lista di preferenze di Helga. Tuttavia né Alberto, né Helga, possono ottenere una condizione migliore, dal momento che gli elementi con cui preferirebbero formare una coppia, sono associati a partner "migliori" sia di Alberto che di Helga.

Nonostante l'esempio appena presentato possa far credere il contrario, è importante chiarire subito che la strategia delle separazioni successive non è corretta: il procedimento di calcolo proposto con l'Algoritmo 1 è errato, esistono configurazioni iniziali che conducono l'algoritmo in un *loop* infinito, ad un procedimento di calcolo senza fine. Per dimostrare che il procedimento appena descritto non è corretto basta proporre un controesempio. Consideriamo quindi due insiemi $X = \{a,b,c\}$ e $Y = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, e le seguenti liste di preferenza:

$$\begin{aligned}
P(a) &= (\beta,\alpha,\gamma)\\
P(b) &= (\gamma,\alpha,\beta)\\
P(c) &= (\alpha,\beta,\gamma)\\
P(\alpha) &= (a,c,b)\\
P(\beta) &= (c,a,b)\\
P(\gamma) &= (a,b,c)
\end{aligned}$$

Applicando l'Algoritmo 1, partendo dal matching $M^{(1)} = \{(a,\alpha),(b,\beta),(c,\gamma)\}$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
M^{(1)} &= \{(\underline{a},\alpha),(b,\underline{\beta}),(c,\gamma)\}\\
M^{(2)} &= \{(a,\underline{\beta}),(b,\alpha),(\underline{c},\gamma)\}\\
M^{(3)} &= \{(a,\gamma),(b,\underline{\alpha}),(\underline{c},\beta)\}\\
M^{(4)} &= \{(\underline{a},\gamma),(b,\beta),(c,\underline{\alpha})\}\\
M^{(5)} &= \{(\underline{a},\alpha),(b,\underline{\beta}),(c,\gamma)\} = M^{(1)}
\end{aligned}$$

Dopo cinque iterazioni siamo tornati alla configurazione instabile iniziale: il procedimento è circolare, senza fine e senza soluzione! Il principale difetto dell'algoritmo appena proposto sta nella scelta della coppia "instabile" da dividere:

In realtà, come dimostreremo più avanti, il problema ammette sempre una soluzione; infatti anche questo semplice esempio ne ammette più d'una: $M = \{(a,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha)\}$ e $M' = \{(a,\gamma),(b,\alpha),(c,\beta)\}$ sono due matching stabili per l'esempio precedente.

5 Generalizzazioni del problema

Il problema del matrimonio stabile, così come è stato posto nelle pagine precedenti, presenta alcune rigidità che ne limitano l'applicabilità a contesti pratici più realistici di quello presentato fino ad ora. In particolare i vincoli più forti consistono nel richiedere che la cardinalità dei due insiemi sia la medesima e che ciascun elemento di ogni insieme esprima una "classifica" completa che coinvolga tutti gli elementi dell'altro insieme.

Come vedremo in seguito, queste due condizioni garantiscono che il problema abbia sempre almeno una soluzione stabile. Nel rilassare le due condizioni bisogna tenere conto, quindi, che così facendo possono venire meno le condizioni di fondo che rendono risolubile il problema stesso.

5.1 Prima generalizzazione: insiemi di cardinalità differente

Supponiamo che la cardinalità dei due insiemi non sia la stessa, ad esempio $|X| < |Y|$. In questa condizione non può essere definita un'istanza del problema matrimonio stabile, perché qualche elemento di Y rimarrebbe comunque privo di compagno, a meno di non consentire ad uno stesso elemento di X di essere associato a più di un elemento dell'insieme Y.

Se $|X| < |Y|$, con l'ipotesi aggiuntiva che ogni elemento $x_k \in X$ possa essere associato a più di un elemento di Y, il problema può essere ricondotto al problema del matrimonio stabile con insiemi di uguale cardinalità, costruendo un'estensione di X, ripetendo n_k volte ciascun elemento $x_k \in X$, fino a costituire un insieme X' con la stessa cardinalità di Y:

$$X' = \{x_k^{(i)}, i = 1,2,\dots,n_k, k = 1,2,\dots,|X|\}, \text{ con } \sum_{k=1}^{|X|} n_k = |Y|$$

È forse utile sottolineare che per costruire X', ciascun elemento $x_k \in X$ può essere ripetuto numero arbitrario di volte: il caso in cui ogni x_k venga ripetuto esattamente n volte per ogni k è un caso molto particolare che può essere applicato solo se $|Y| = n|X|$.

Il problema del matrimonio stabile con insiemi di cardinalità differente può essere usato per costruire un modello per il problema della assegnazione del medico di base ai pazienti assistiti da una determinata ASL: il numero di medici naturalmente è di molto inferiore al numero di persone che rientrano nell'ambito territoriale di una certa Azienda Sanitaria, ma è pur vero che uno stesso medico può assistere più di un paziente. In questo caso quindi $X = \{\text{insieme dei medici}\}$ e $Y = \{\text{insieme dei pazienti}\}$; il medico k-esimo dell'insieme X può assistere al massimo n_k pazienti. Ovviamente risulta $|X| < |Y|$ e $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = |Y|$.

Ciascun paziente indica la propria preferenza per i diversi medici basandosi su un criterio soggettivo, mentre la preferenza dei medici per i pazienti viene costruita applicando un criterio oggettivo, come ad esempio la distanza del domicilio del paziente dallo studio del medico. In questo modo, applicando il problema del matrimonio stabile all'assegnazione dei medici di base, si otterrà la configurazione che scontenti il minor numero di pazienti avvantaggiando nella associazione medico-paziente quanti preferiscono un certo medico ed abitano vicino al suo studio, rispetto a quanti, pur preferendolo, abitano più lontano.

Lo stesso problema con insiemi di cardinalità differente può essere applicato alla iscrizione di un certo insieme Y di studenti ad un insieme X di corsi di laurea a numero chiuso. Anche in questo caso risulta $|X| < |Y|$ e, per ciascun corso di laurea $x_k \in X$ è fissato il numero massimo n_k di studenti che possono iscriversi. L'insieme X' ottenuto estendendo X ripetendo n_k volte l'elemento x_k, per $k = 1,2,\dots,n$, rappresenta quindi l'insieme di posti disponibili per l'iscrizione in ogni corso di laurea dell'insieme X. Ad esempio gli elementi $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n_1)}$ rappresentano gli n_1 posti disponibili per il corso di laurea in Matematica, mentre gli elementi $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(n_2)}$ rappresentano gli n_2 posti disponibili per il corso di laurea in Fisica, e così via.

Ciascuno studente esprime una lista di preferenza sui corsi di laurea offerti dall'Ateneo ed anche i corsi di laurea fanno altrettanto, definendo delle liste di preferenza sugli studenti, in modo tale da privilegiare quelli che soddisfino determinati criteri attitudinali per la materia (ad esempio il risultato in un insieme di test di ingresso interdisciplinari a cui sono sottoposti tutti gli studenti che aspirano ad iscriversi ad una certa Università). In questo modo si otterrà una assegnazione degli studenti ai diversi corsi di laurea bilanciando le giuste aspirazioni di ognuno con dei criteri oggettivi di valutazione delle attitudini.

5.2 Seconda generalizzazione: liste di preferenza incomplete

In molte applicazioni pratiche è irrealistico che ciascun elemento dei due insiemi esprima una lista di preferenza completa su tutti gli elementi dell'altro insieme. Ad esempio, nella scelta del corso di laurea è probabile che uno studente preferisca rinunciare agli studi universitari o iscriversi ad un'università differente, se non venisse accettato da un ristretto insieme di corsi di laurea di propria preferenza. Anche nel curioso esempio iniziale sulle coppie di ragazzi e ragazzi di un gruppo di amici, è probabile che ciascuno esprima la propria preferenza su un sottoinsieme dei membri dell'altro insieme, preferendo rimanere da solo, piuttosto che finire in coppia con una persona non gradita.

Supponiamo quindi che a ciascun elemento $x_k \in X$ del primo insieme sia associata una lista di preferenze parziale $P(x_k)$ sui membri dell'altro insieme e che lo stesso avvenga per ogni elemento $y_h \in Y$ del secondo insieme.

L'obiettivo è quello di ricondurre ogni istanza del problema con liste di preferenza incomplete ad una istanza equivalente del problema del matrimonio stabile con liste di preferenza complete. Per far questo aggiungiamo ad ognuno dei due insiemi un elemento, che chiameremo il *vedovo* e la *vedova*: $X = X \cup \{v_X\}$, $Y = Y \cup \{v_Y\}$. Le liste di preferenza $P(x_k)$ e $P(y_h)$ degli elementi di X e di Y vengono completate come segue, in modo tale da ricondursi al caso del problema con liste di preferenza complete:

- si colloca v_X come ultima preferenza di v_Y e viceversa
- si colloca v_X come ultima preferenza di ciascun elemento $y \in Y$, e viceversa
- si aggiungono in un ordine arbitrario, dopo v_X tutti gli elementi mancanti alla lista di ciascun elemento $y \in Y$, e viceversa

Il seguente Teorema garantisce che la trasformazione operata nel riportare un'istanza del problema con liste incomplete ad un'istanza equivalente del problema con liste complete è corretta e non altera i termini del problema originale: la soluzione dell'istanza del problema originale, con liste incomplete, esiste se e solo se esiste una soluzione all'istanza ottenuta completando le liste come descritto in precedenza, in cui gli elementi v_X e v_Y sono associati in una coppia del matching.

Teorema 1. *Per la versione completa del problema esiste un matching stabile in cui v_X e v_Y sono associati se e solo se esiste un matching stabile nella versione incompleta del problema*

Dimostrazione. Se esiste un matching stabile per la versione completa, in cui (v_X, v_Y) costituiscono una coppia, allora lo stesso matching è stabile anche eliminando v_X e v_Y, perché visto che v_X è la scelta peggiore per v_Y e viceversa, evidentemente perché l'istanza completa del problema abbia un matching stabile con v_X e v_Y accoppiati, significa che nessun altro elemento di X e Y preferisce rispettivamente v_Y e v_X al proprio partner.

Al contrario se esiste un matching stabile per il problema con le liste incomplete allora lo stesso matching, con l'aggiunta della coppia (v_X, v_Y) è un matching stabile per il problema con le liste complete. $\square$

6 L'algoritmo di Gale e Shapley

A questo punto è necessario provare che una soluzione del problema con liste complete e insiemi di uguale cardinalità esiste sempre; per far questo, nelle prossime pagine, costruiremo un algoritmo in grado di calcolare una soluzione ottima (stabile) per ogni istanza del problema. L'Algoritmo 2 presentato di seguito è dovuto ai matematici americani Dave Gale e Lloyd Shapley che lo pubblicarono nel 1962 per dimostrare che il problema del matrimonio stabile ammette sempre una soluzione [2].

Nelle pagine seguenti indichiamo con Ω un elemento fittizio aggiunto all'insieme X: rappresenta il partner meno desiderabile per ciascun elemento di Y e viene collocato in fondo alla lista di preferenza di ciascun $y \in Y$. Nell'algoritmo di Gale e Shapley inizialmente ogni elemento $y \in Y$ è associato a Ω.

Algoritmo 2 StableMarriage(X,Y)

Input: I due insiemi X e Y e le liste di preferenza complete
Output: Un matching stabile tra X e Y
1: $k := 0$, associa a Ω ogni $y \in Y$
2: **fintanto che** $k < n$ **ripeti**
3:     sia $\bar{x} := x_{k+1}$
4:     **fintanto che** $\bar{x} \neq \Omega$ **ripeti**
5:         sia y la migliore scelta rimanente per $\bar{x}$ nella sua lista
6:         **se** y preferisce $\bar{x}$ al suo partner **allora**
7:             associa $(\bar{x}, y)$, sia $\bar{x}$ il precedente elemento associato a y
8:         **fine-condizione**
9:         **se** $\bar{x} \neq \Omega$ **allora**
10:             elimina y dalla lista di preferenze di $\bar{x}$
11:         **fine-condizione**
12:     **fine-ciclo**
13:     $k := k+1$
14: **fine-ciclo**

Teorema 2. *L'algoritmo* StableMarriage *produce un matching stabile per ogni istanza del problema formulata con $|X| = |Y|$ e liste di preferenza complete per ciascun elemento di X e di Y.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che se al passo 10 y viene rimosso dalla lista delle preferenze di $\bar{x}$ allora non esiste un matching stabile che contiene $(\bar{x}, y)$. Infatti se y viene rimosso, vuol dire che y ha preferito un altro elemento $\tilde{x} \in X$ a $\bar{x}$: dunque y preferisce $\tilde{x}$ e $\tilde{x}$ preferisce y ad ogni altro elemento presente nella propria lista, visto che la scelta per la costruzione delle coppie del matching avviene rispettando l'ordine di preferenza degli elementi di X.

Se ad un certo passo viene prodotta la coppia (x,y) e x preferisce $\tilde{y}$ a y, allora vuol dire che nei passi precedenti dell'algoritmo $\tilde{y}$ ha rifiutato x preferendo il proprio partner. Infatti le coppie vengono create seguendo l'ordine di preferenza degli elementi di X e dunque se x viene associato a y invece che a $\tilde{y}$ è solo perché $\tilde{y}$ ha rifiutato x nei passi precedenti dell'algoritmo.

Due elementi di Y non possono essere associati allo stesso elemento di X (a meno dell'elemento aggiuntivo Ω).

La situazione di accoppiamento di ciascun elemento di Y non peggiora mai durante l'esecuzione dell'algoritmo. Infatti inizialmente risulta (Ω, y) per ogni $y \in Y$ (accoppiamento peggiore in assoluto); successivamente l'accoppiamento di y cambia solo se la nuova proposta migliora la precedente (condizione al passo 6).

La lista di preferenza di ogni elemento $x \in X$ non diventa mai vuota. Se così fosse, infatti, vorrebbe dire che x è stato rifiutato da ogni $y \in Y$, il che non è possibile, visto che $|Y| = |X|$.

Quindi l'algoritmo è ben definito e termina sempre individuando un matching.

Il matching con cui termina l'algoritmo è stabile. Infatti per ogni coppia $(x, y) \in M$, se x preferisce $\tilde{y}$ a y, significa che $\tilde{y}$ ha preferito a x un altro elemento di X; dunque la preferenza di x per $\tilde{y}$ non compromette la stabilità del matching. □

La dimostrazione di questo risultato è abbastanza particolare: di fatto, per provare che il problema ammette una soluzione per ciascuna istanza ammissibile, si costruisce un algoritmo e si dimostra che l'algoritmo produce una soluzione stabile per ogni istanza.

È opportuno osservare che l'algoritmo produce sempre la soluzione ottimale per ciascun elemento di X: ogni elemento $x \in X$ non potrebbe essere associato ad un diverso partner $\tilde{y}$, preferito da x rispetto al partner y assegnatogli nel matching prodotto dall'algoritmo ($\tilde{y} <_x y$) senza rendere instabile il matching. Infatti le coppie vengono formate procedendo secondo l'ordine stabilito dalle liste di preferenza degli elementi di X, prendendo in esame i partner di ciascun $x \in X$ in ordine decrescente di preferenza.

Al tempo stesso l'algoritmo produce la soluzione peggiore per ciascun elemento di Y. Supponiamo infatti che (x, y) sia una coppia del matching stabile M prodotto dall'Algoritmo 2; supponiamo inoltre che in un altro matching stabile M', non prodotto da questo algoritmo, siano presenti le coppie $(x, \tilde{y})$ e $(\tilde{x}, y)$. Come abbiamo già visto, la soluzione prodotta dall'algoritmo è ottimale per gli elementi di X, quindi x preferisce y a $\tilde{y}$; allora possiamo concludere che y preferisce $\tilde{x}$ a x, perché altrimenti il matching M' non sarebbe stabile.

7 Conclusioni

L'algoritmo di Gale e Shapley sembra proprio contraddire il proverbio che afferma che «*in amor vince chi fugge*»! La strategia di attacco adottata dall'insieme X dei "maschi" consente loro di giungere alla configurazione più vantaggiosa per loro; al contrario, la strategia attendista delle "femmine" conduce alla peggiore configurazione tra quelle accettabili (stabili).

Per questo motivo lo studio del problema del matrimonio stabile e degli algoritmi che, come quello di Gale e Shapley, ne forniscono una soluzione, rientra a pieno titolo nell'ambito della Teoria dei Giochi ed è valsa, tardivamente, al massimo riconoscimento scientifico e culturale per uno dei due autori dell'algoritmo. Nel 2012, infatti, il Premio Nobel per l'Economia è stato assegnato ad Alvin Roth, di 61 anni, docente alla Harvard University di Boston, e a Lloyd Shapley, di 89 anni, professore emerito alla University of California di Los Angeles (UCLA). In questo modo Shapley ha potuto vedere riconosciuti i meriti dei suoi studi sulla teoria dei giochi cooperativi e sulla stabilità dei mercati, a partire dal famoso algoritmo del 1962 che abbiamo descritto nelle pagine precedenti. Non altrettanto fortunato è stato invece David Gale, anch'egli matematico ed economista di fama mondiale, professore emerito dell'Università della California a Berkeley, che è scomparso nel 2008 all'età di 87 anni.

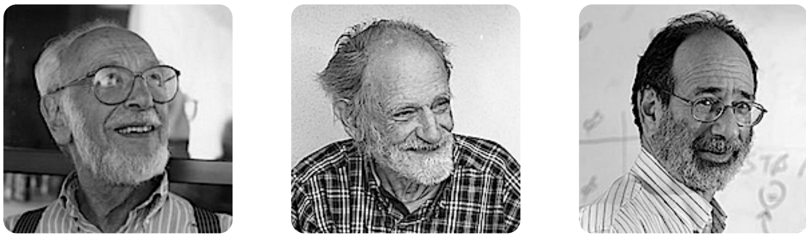

Figura 1: David Gale (1921–2008), Lloyd S. Shapley (1923), Alvin E. Roth (1951)

L'algoritmo di Gale e Shapley consente di individuare *una* soluzione stabile. Nel 1971 Mc Vitie e Wilson [5] pubblicarono un algoritmo che consente di individuare tutte le soluzioni stabili di un'istanza del problema.

Chiudiamo con un aneddoto. Sembra che Alvin Roth, nell'apprendere di aver vinto il Premio Nobel, abbia affermato: «Adesso i miei studenti staranno più attenti a lezione!»

Riferimenti bibliografici

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, *Introduzione agli algoritmi e strutture dati*, seconda edizione, McGraw-Hill, 2005.

[2] Dave Gale, Lloyd S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly, 69, 1962.

[3] Michael R. Garey, David S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, CA, 1979.

[4] Donald E. Knuth, *Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems – An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms*, American Mathematical Society, 1996.

[5] D. G. McVitie, L. B. Wilson, *The stable marriage problem*, Communication of the ACM, 14, 1971.