

## **4. Elementi di Teoria dei Grafi**

Marco Liverani

Università degli Studi Roma Tre  
Dipartimento di Matematica e Fisica  
Corso di Laurea in Matematica  
E-mail [liverani@mat.uniroma3.it](mailto:liverani@mat.uniroma3.it)

Marzo 2014



## 1 Generalità

Un **grafo**  $G = (V, E)$  è una coppia di insiemi disgiunti:  $V$  è un insieme non vuoto, discreto, finito, i cui elementi sono i **vertici** del grafo, mentre  $E$ , l'insieme degli **spigoli** del grafo, è un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $V \times V$ , ossia un insieme di coppie di vertici del grafo. A meno che non sia diversamente specificato, nel seguito considereremo sempre gli elementi dell'insieme  $E$  come coppie *non ordinate* di elementi di  $V$ ; in altri termini le coppie  $(u, v) \in E$  e  $(v, u) \in E$  rappresentano lo stesso spigolo del grafo  $G$ . Talvolta i vertici del grafo vengono chiamati anche *nodi* o *punti*, mentre i termini *arco* e *lato* sono sinonimi di spigolo. Spesso, per maggiore chiarezza, si indicano con  $V(G)$  e con  $E(G)$  rispettivamente l'insieme dei vertici e degli spigoli del grafo  $G$ . Convenzionalmente con le lettere  $n$  ed  $m$  si indica la cardinalità di  $V$  ed  $E$ , rispettivamente, ossia il numero di vertici e di spigoli del grafo:  $n = |V(G)|$  e  $m = |E(G)|$ .

Il grafo  $G = (V, E)$  con  $V(G) = \{v\}$  ed  $E(G) = \emptyset$  è il grafo **banale** o **nullo**.

Se  $e \in E(G)$  ed  $e = (u, v)$ , con  $u, v \in V(G)$ , allora si dice che i vertici  $u$  e  $v$  sono tra loro **adiacenti** e costituiscono gli **estremi** dello spigolo  $e$ ; al tempo stesso diremo che lo spigolo  $e$  è **incidente** i vertici  $u$  e  $v$ . Uno spigolo  $(u, u)$  da un vertice  $u$  in se stesso è un **cappio**.

Se per ogni coppia di vertici  $u, v \in V(G)$  esiste al più un solo spigolo  $(u, v) \in E(G)$  diremo che il grafo  $G$  è **semplice**. Al contrario, un **multigrafo** è un grafo in cui esistono due o più spigoli distinti che hanno come estremi la stessa coppia di vertici. Salvo diversa indicazione d'ora in avanti considereremo sempre grafi semplici.

Il grafo  $G = (V, E)$  è **orientato** se gli spigoli sono considerati come coppie *ordinate* di vertici: in questo caso  $(u, v) \neq (v, u)$ . Se  $e = (u, v) \in E(G)$  è uno spigolo del grafo orientato  $G$ , diremo che lo spigolo è **uscende** da  $u$  ed è **entrante** in  $v$ . Viceversa se gli spigoli del grafo sono considerati come coppie non ordinate, ossia se  $(u, v) = (v, u)$  per ogni spigolo del grafo, allora diremo che il grafo è **non orientato**. In questo caso sarebbe più corretto indicare gli spigoli del grafo con la notazione  $\{u, v\}$ , per rendere evidente che i due vertici estremi dello spigolo non sono considerati come una coppia ordinata e che dunque  $\{u, v\} = \{v, u\}$ . Tuttavia nel seguito, per semplicità, con un abuso di notazione, indicheremo con  $(u, v)$  sia gli spigoli non orientati, che quelli dotati di un verso, appartenenti ad un grafo orientato, esplicitando lì dove non dovesse essere chiaro dal contesto, se si tratta di spigoli orientati o non orientati. È bene precisare che un grafo orientato  $G$  tale che  $(u, v), (v, u) \in E(G)$  non è un multigrafo, dal momento che i due spigoli escono ed entrano in vertici differenti.

Dato un grafo  $G = (V, E)$  orientato, è possibile definire il grafo **trasposto**  $G^T$ , ponendo  $V(G^T) = V(G)$  ed  $E(G^T) = \{(u, v) : u, v \in V(G) \text{ e } (v, u) \in E(G)\}$ ; di fatto è il grafo ottenuto da  $G$  invertendo il verso degli spigoli.

È spesso molto utile produrre una rappresentazione grafica di un grafo, mediante un disegno. I grafi possono essere disegnati rappresentando i vertici come punti e gli spigoli come segmenti (orientati o non orientati) o curve che uniscono coppie di vertici. In Figura 1 è rappresentato un grafo orientato

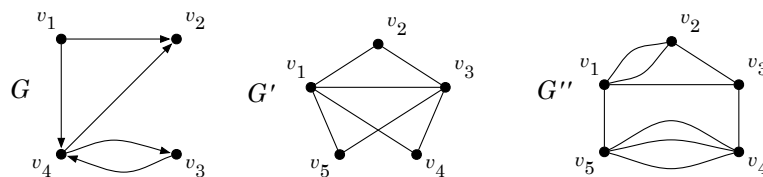
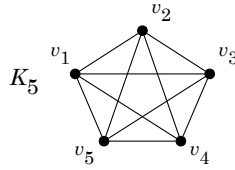


Figura 1: Un grafo  $G$  orientato, un grafo  $G'$  non orientato, un multigrafo  $G''$



**Figura 2:** Il grafo completo con cinque vertici  $K_5$

$G = (V, E)$ , con  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  ed  $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_4, v_3)\}$ ; nella stessa figura è rappresentato anche il grafo non orientato  $G'$  con 5 vertici ed il multigrafo  $G''$  in cui sono presenti più di uno spigolo tra le coppie di vertici  $v_1, v_2$  e  $v_4, v_5$ . È bene non confondere mai un grafo con il suo disegno, dal momento che la collocazione sul piano dei vertici del grafo è del tutto arbitraria, come anche lo è il disegno della curva con cui si rappresentano gli spigoli; per cui uno stesso grafo può essere disegnato in modi molto diversi tra loro.

Per ogni vertice  $u$  di un grafo  $G = (V, E)$  indichiamo con  $N(u) = \{v \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}$  l'insieme dei vertici adiacenti a  $u$ . Inoltre  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ . Riferendoci al grafo  $G'$  di Figura 1 risulta  $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$  e  $N[v_2] = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

Dati due vertici  $u, v \in V(G)$  diremo che  $u$  **domina**  $v$  se  $N[v] \subseteq N[u]$ , ossia se  $u$  è adiacente a tutti i vertici adiacenti a  $v$ . Facendo riferimento ancora una volta al grafo  $G'$  di Figura 1, possiamo dire che il vertice  $v_2$  domina i vertici  $v_5$  e  $v_4$ , ma non domina i vertici  $v_1$  e  $v_3$ ; al contrario i vertici  $v_1$  e  $v_3$  dominano tutti i vertici del grafo. Un vertice adiacente ad ogni altro vertice del grafo si dice **universale**; i vertici  $v_1$  e  $v_3$  del grafo  $G'$  in Figura 1 sono entrambi dei vertici universali, mentre il grafo orientato  $G$  non possiede vertici universali. Un **cono** è un grafo con un vertice universale. Se  $S \subseteq V(G)$  indichiamo con  $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$ . Un sottoinsieme di vertici  $S \subset V(G)$  è un **insieme dominante** per il grafo  $G$  se i vertici in  $V \setminus S$  sono tutti adiacenti ad almeno un vertice di  $S$ ; in altri termini  $S$  è dominante se  $N[S] = V$ . Nel grafo orientato  $G$  della Figura 1 gli insiemi  $D_1 = \{v_1, v_4\}$  e  $D_2 = \{v_1, v_3\}$  sono entrambi dominanti. La cardinalità minima di un insieme dominante per il grafo  $G$  è noto come **domination number** di  $G$  e viene indicato con  $\gamma(G)$ .

L'insieme degli spigoli di un grafo  $G = (V, E)$  è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di  $V(G)$  con se stesso:  $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ . Se  $E(G) \equiv V(G) \times V(G)$  allora diremo che il grafo è **completo**: in questo caso, per ogni coppia di vertici distinti esiste uno spigolo che li collega. Indicheremo il grafo completo con  $n$  vertici con la notazione  $K_n$ ; ad esempio il grafo completo con 5 vertici sarà indicato con  $K_5$  (vedi Figura 2).

Un grafo con “molti” spigoli rispetto al numero dei vertici è chiamato **denso**, mentre al contrario un grafo con “pochi” spigoli è detto **sperso**; in generale possiamo dire che un grafo è sparso se il numero di spigoli è dello stesso ordine di grandezza del numero dei vertici:  $|E(G)| = O(|V(G)|)$ .

Un **grafo pesato** è un grafo a cui siano stati associati dei pesi ad ognuno dei suoi vertici o ad ognuno dei suoi spigoli. Nel caso di grafi pesati sui vertici il peso di un vertice è una funzione  $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ ; nel caso di grafi pesati sugli spigoli la funzione peso  $w$  è definita come  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ .

In un grafo non orientato, il **grado di un vertice**  $v$ ,  $d(v)$ , è dato dal numero di spigoli incidenti su di esso; se  $d(v) = 0$  allora diremo che  $v$  è un vertice **isolato**, mentre se  $d(v) = n - 1$ , ossia se  $v$  è adiacente ad ogni altro vertice del grafo,  $v$  è universale. In un grafo si definiscono il grado massimo,  $\Delta(G)$ , dato dal massimo grado dei suoi vertici, ed il grado minimo,  $\delta(G)$ , dato dal minimo grado dei suoi vertici. Un grafo è **regolare** se i vertici hanno tutti lo stesso grado ( $\Delta(G) = \delta(G)$ ); in particolare se  $d(v) = p$  per ogni  $v \in V(G)$  allora  $G$  è un grafo  $p$ -regolare. Ad esempio osserviamo che il grafo completo  $K_n$  è  $(n - 1)$ -regolare.

**Proposizione 1.** *In un grafo non orientato risulta  $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v)$ : la somma del grado dei vertici è pari.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione della proprietà è banale, dal momento che ogni spigolo del grafo collega due vertici, aumentando di 1 il grado di ciascuno dei due estremi; dunque la somma del grado di tutti i vertici del grafo è pari al doppio degli spigoli del grafo stesso.  $\square$

La seguente proposizione può essere ottenuta come corollario della proposizione precedente, ma può anche essere dimostrata autonomamente per induzione.

**Proposizione 2.** *Ogni grafo  $G = (V, E)$  possiede un numero pari di vertici di grado dispari.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede per induzione sul numero di spigoli  $m = E(G)$ . Per  $m = 0$  ed  $m = 1$  la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi che sia vera per  $m > 1$  e dimostriamo che anche un grafo con  $m + 1$  spigoli ha un numero pari di vertici di grado dispari. L'aggiunta dello spigolo  $e$  collegherà una coppia di vertici  $u$  e  $v$ . Se  $u$  e  $v$  prima dell'inserimento dello spigolo  $e$  avevano entrambi grado pari, allora avranno entrambi grado dispari dopo che lo spigolo è stato aggiunto; dunque complessivamente il numero di vertici di grado dispari è aumentato di 2 e pertanto è ancora un numero pari. Un ragionamento del tutto analogo possiamo farlo nel caso in cui entrambi i vertici  $u$  e  $v$  hanno grado dispari prima dell'inserimento dello spigolo: in seguito avranno entrambi grado pari e dunque complessivamente il numero di vertici di grado dispari è diminuito di 2 e pertanto è ancora un numero pari. Infine è possibile che uno dei due vertici,  $u$ , abbia grado pari e l'altro,  $v$ , grado dispari prima dell'inserimento dello spigolo  $e$ ; quindi in seguito avranno l'uno grado dispari e l'altro grado pari e dunque in questo caso il numero di vertici di grado dispari è invariato e pertanto conserva la parità che aveva prima dell'inserimento dello spigolo  $e = (u, v)$ .  $\square$

Nel caso dei grafi orientati possiamo distinguere il **grado entrante** di un vertice  $v$  dal suo **grado uscente** (rispettivamente  $d_e(v)$  e  $d_u(v)$ ): il primo è dato dal numero di spigoli entranti in  $v$ , mentre il secondo è dato dal numero di spigoli uscenti. In un grafo orientato una **sorgente** è un vertice il cui grado entrante è nullo; viceversa chiamiamo **pozzo** un vertice il cui grado uscente sia nullo. In un grafo orientato possono esistere più pozzi e più sorgenti. Nel grafo  $G$  rappresentato a sinistra in Figura 1 il vertice  $v_1$  è una sorgente, mentre il vertice  $v_2$  è un pozzo: infatti  $d_e(v_1) = 0$  (non esiste nessuno spigolo entrante in  $v_1$ ) e  $d_u(v_2) = 0$  (non esiste nessuno spigolo uscente da  $v_2$ ).

Un grafo può essere rappresentato utilizzando una matrice. Una **matrice di adiacenza** è una matrice quadrata binaria  $M$  di ordine  $n = |V|$  definita ponendo

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se il grafo è non orientato per definizione risulta  $(v_i, v_j) \in E(G) \iff (v_j, v_i) \in E(G)$ , pertanto la matrice di adiacenza sarà simmetrica rispetto alla diagonale principale. La seguente matrice rappresenta il grafo orientato  $G$  riportato in Figura 1:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla rappresentazione con una matrice di adiacenza risulta immediatamente evidente che i vertici sorgente (privi di spigoli entranti) sono i vertici  $v_i$  tali che la  $i$ -esima colonna della matrice di adiacenza

è costituita da elementi tutti nulli (come la prima colonna della matrice  $M$  che rappresenta gli spigoli entranti nel vertice  $v_1$  del grafo  $G$  di Figura 1). Anche i vertici pozzo possono essere identificati facilmente sulla matrice di adiacenza: sono quei vertici  $v_j$  tali che la  $j$ -esima riga della matrice è costituita da elementi nulli (come la seconda riga della matrice  $M$  che corrisponde al vertice  $v_2$  del grafo in figura).

Se ogni spigolo  $e = (u, v) \in E(G)$  del grafo è associato ad un peso  $w(u, v)$  non nullo, allora è possibile modificare la rappresentazione del grafo con una matrice di adiacenza in modo da poter tenere traccia anche dei pesi associati agli spigoli; per far questo basta porre  $M_{i,j} = w(v_i, v_j)$  se  $(v_i, v_j) \in E$  e  $M_{i,j} = 0$  altrimenti.

Una tecnica per la rappresentazione dei grafi molto utilizzata in informatica prevede l'utilizzo di una famiglia di  $n$  liste  $L_1, L_2, \dots, L_n$  di vertici, denominate **liste di adiacenza** del grafo  $G$ . Per ogni vertice  $v_i \in V(G)$ , vengono memorizzati i suoi vertici adiacenti nella lista  $L_i$ : in altre parole  $L_i = N(v_i)$ . Se  $(v_i, v_j) \in E(G)$ , nella rappresentazione del grafo con una collezione di liste di adiacenza risulterà  $v_j \in L_i$ . Ad esempio la rappresentazione con liste di adiacenza del grafo orientato  $G$  della Figura 1 è la seguente:

$$\begin{aligned} L_1 &: v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow \text{nil} \\ L_2 &: \text{nil} \\ L_3 &: v_4 \rightarrow \text{nil} \\ L_4 &: v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \text{nil} \end{aligned}$$

Con questo tipo di rappresentazione trovare i vertici pozzo è effettivamente assai semplice: i pozzi sono quei vertici  $v_i$  tali che la lista di adiacenza  $L_i$  corrispondente è vuota. Viceversa individuare i vertici sorgente con una rappresentazione di questo tipo può essere più laborioso: le sorgenti sono quei vertici che non sono presenti nella lista di adiacenza di nessun altro vertice del grafo.

In generale la rappresentazione mediante liste di adiacenza è preferibile a quella con matrici di adiacenza perché è più compatta e consente di implementare algoritmi più efficienti dal punto di vista della complessità computazionale. Tali algoritmi infatti, fissato un vertice  $v \in V(G)$ , spesso richiedono di iterare un certo numero di passi su tutti i vertici  $u \in N(v)$ : tale operazione ha un costo pari a  $|N(v)|$  se l'elenco dei vertici adiacenti a  $v$  è rappresentato con una lista di adiacenza  $L_v$ , mentre la stessa operazione ha un costo pari ad  $n > |N(v)|$  ( $n = |V(G)|$ ) se la rappresentazione del grafo avviene mediante una matrice di adiacenza. Ad esempio nell'Algoritmo 1 è riportata la procedura per il calcolo del grado uscente di un vertice  $v \in V(G)$ : utilizzando la rappresentazione del grafo con liste di adiacenza il ciclo di riga 2 viene iterato per  $|N(v)|$  volte, visto che prendere in considerazione i vertici adiacenti a  $v$  consiste sostanzialmente nello scorrere la lista  $L_v$ .

---

#### Algoritmo 1 GRADOUSCENTE( $G, v$ )

---

**Input:** Il grafo  $G$  ed un vertice  $v \in V(G)$

**Output:** Il grado uscente  $d_u(v)$  del vertice  $v$

- 1:  $d_u(v) := 0$
  - 2: **per ogni**  $u \in N(v)$  **ripeti**
  - 3:    $d_u(v) := d_u(v) + 1$
  - 4: **fine-ciclo**
  - 5: restituisci  $d_u(v)$
- 

L'Algoritmo 2 implementa la stessa procedura facendo uso di una matrice di adiacenza. Il ciclo riportato nelle righe 2–6 viene iterato  $n$  volte, anche quando il numero di vertici adiacenti a  $v_i$  è molto piccolo o è addirittura pari a zero.

---

**Algoritmo 2** GRADOUSCENTE( $G, v_i$ )

---

**Input:** La matrice di adiacenza  $M$  del grafo  $G$  ed un vertice  $v_i \in V(G)$ **Output:** Il grado uscente  $d_u(v_i)$  del vertice  $v_i$ 

- 1:  $d_u(v_i) := 0$
  - 2: **per**  $j := 1, 2, \dots, n$  **ripeti**
  - 3:   **se**  $M_{i,j} \neq 0$  **allora**
  - 4:      $d_u(v_i) := d_u(v_i) + 1$
  - 5:   **fine-condizione**
  - 6: **fine-ciclo**
  - 7: restituisci  $d_u(v_i)$
- 

Il discorso di capovolge nel caso del calcolo del grado entrante in un vertice del grafo: utilizzando la rappresentazione con una matrice di adiacenza il tempo di calcolo rimarrà invariato, pari al numero di vertici  $n$  del grafo (analogamente a quanto avviene nell'Algoritmo 2 è sufficiente scorrere la colonna  $i$ -esima della matrice  $M$  per contare i vertici a cui  $v_i$  è adiacente). Viceversa con una rappresentazione del grafo mediante liste di adiacenza le cose si complicano: a meno di non utilizzare delle strutture dati aggiuntive, è necessario scorrere tutte le liste di adiacenza di ogni altro vertice del grafo per contare in quali di queste liste è presente il vertice  $v$  (vedi Algoritmo 3). Nel caso peggiore, quando il grafo è completo e il vertice  $v$  è l'ultimo vertice di ogni lista, il numero di operazioni complessive sarà dell'ordine di  $O(n^2)$  e non più lineare.

---

**Algoritmo 3** GRADOENTRANTE( $G, v$ )

---

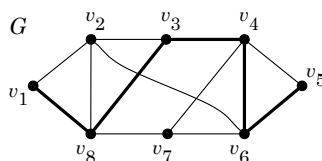
**Input:** Le liste di adiacenza del grafo  $G$  ed un vertice  $v \in V(G)$ **Output:** Il grado entrante  $d_e(v)$  del vertice  $v$ 

- 1:  $d_e(v) := 0$
  - 2: **per ogni**  $u \in V(G)$  **ripeti**
  - 3:   **per ogni**  $w \in N(u)$  **ripeti**
  - 4:     **se**  $w = v$  **allora**
  - 5:        $d_e(v) := d_e(v) + 1$
  - 6:     **fine-condizione**
  - 7:   **fine-ciclo**
  - 8: **fine-ciclo**
  - 9: restituisci  $d_e(v)$
- 

Naturalmente nel caso in cui per risolvere un determinato problema su un grafo orientato sia più frequente utilizzare l'informazione relativa agli spigoli entranti nei vertici del grafo, piuttosto che quella relativa agli spigoli uscenti, è possibile rappresentare il grafo utilizzando delle **liste di incidenza**, in cui per ogni vertice  $v \in V(G)$  si memorizzano in una lista  $L_v$  tutti i vertici da cui esce uno spigolo entrante (incidente) in  $v$ : in questo caso  $L_v = \{u : (u, v) \in E(G)\}$ .

## 2 Cammini e cicli

Un **cammino**  $p : u \rightsquigarrow v$  dal vertice  $u$  al vertice  $v$  sul grafo  $G = (V, E)$  è una successione di vertici  $p = (w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_k})$  tali che  $u = w_{i_1}$ ,  $v = w_{i_k}$  e  $(w_{i_h}, w_{i_{h+1}}) \in E(G)$  per ogni  $h = 1, 2, \dots, k - 1$ . La **lunghezza** del cammino è data dal numero degli spigoli. Se i vertici del cammino sono tutti distinti il



**Figura 3:** Un grafo non orientato e il cammino semplice  $p : v_1 \rightsquigarrow v_5$

cammino si dice **semplice**. In generale si indica con  $P_k$  il cammino semplice di lunghezza  $k - 1$  con  $k$  vertici. Il cammino semplice evidenziato sul grafo rappresentato in Figura 3 è un  $P_6$  di lunghezza 5.

Un **ciclo**  $C_k$  è un cammino  $(w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_k}, w_{i_{k+1}})$  in cui  $w_{i_1} = w_{i_{k+1}}$ ; con la notazione  $C_k$  si indica un ciclo semplice, composto da  $k$  vertici distinti e da  $k$  spigoli. Un **cappio** è un ciclo di lunghezza 1. Un grafo privo di cicli si dice **aciclico**. Il grafo rappresentato in Figura 3 contiene numerosi cicli, ad esempio  $C_3 = (v_2, v_3, v_8, v_2)$  e  $C_6 = (v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_2)$ .

In un grafo  $G = (V, E)$  un cammino semplice costituito da tutti i vertici del grafo è un **cammino hamiltoniano**; questo tipo di cammini prende il nome da Sir William Rowan Hamilton, celebre matematico, fisico e astronomo irlandese del XIX sec. È opportuno osservare che non tutti i grafi contengono un cammino hamiltoniano, mentre tutti i grafi completi ammettono un cammino hamiltoniano costituito da una qualsiasi permutazione di  $V(G)$ . In Figura 3 è riprodotto un grafo  $G$  non orientato che ammette diversi cammini hamiltoniani, ad esempio il cammino  $h = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ . Un **ciclo hamiltoniano** è un ciclo semplice che passa una ed una sola volta per ogni vertice del grafo. Un grafo si dice hamiltoniano se possiede almeno un ciclo hamiltoniano; è facile osservare che ogni grafo completo è hamiltoniano.

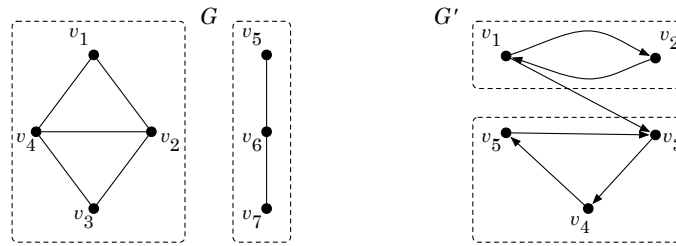
Dato un grafo  $G$ , determinare se questo contiene un cammino hamiltoniano è un problema NP-completo. Un algoritmo per il calcolo di un ciclo hamiltoniano in un grafo  $G = (V, E)$  con  $n$  vertici, può essere implementato con una tecnica di enumerazione: l'algoritmo non deve far altro che costruire tutte le possibili permutazioni dell'insieme dei vertici del grafo e, per ciascuna permutazione, deve verificare se questa costituisce un ciclo hamiltoniano su  $G$ . Per la costruzione delle permutazioni di  $V(G)$  si può usare un algoritmo che, come abbiamo visto, ha una complessità esponenziale  $O(n!)$ . Per verificare se una singola permutazione di  $V(G)$  è un ciclo hamiltoniano, basta verificare che i vertici nell'ordine prodotto dalla permutazione  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$  siano a due a due adiacenti:  $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E(G)$  per  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  e  $(v_{i_n}, v_{i_1}) \in E(G)$ . La verifica di una singola soluzione è quindi un'operazione di complessità polinomiale.

Il Teorema 1, dovuto a Gabriel Andrew Dirac, figliastro del premio Nobel per la Fisica Paul Dirac, fornisce una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un grafo con  $n$  vertici sia hamiltoniano.

**Teorema 1** (Dirac). *Sia  $G = (V, E)$  un grafo con  $n > 2$  vertici. Se  $d(v) \geq n/2$  per ogni  $v \in V(G)$ , allora  $G$  è hamiltoniano.*

Il grafo in Figura 3 è un controesempio del Teorema di Dirac e mette in evidenza il fatto che tale teorema non offre una condizione necessaria per riconoscere i grafi hamiltoniani: tale grafo, infatti, ammette un ciclo hamiltoniano (banalmente è il ciclo formato dalla sequenza  $(v_1, v_2, \dots, v_7, v_8, v_1)$ ), eppure non soddisfa le condizioni del Teorema 1. Altri controesempi elementari sono costituiti da tutti i grafi  $C_k$ , con  $k \geq 6$ : pur essendo  $d(v) = 2$  per ogni  $v \in V(C_k)$  e  $d(v) < n/2$  per  $k \geq 6$ , i grafi  $C_k$  sono hamiltoniani.





**Figura 4:** Un grafo non orientato  $G$  con due componenti connesse ed un grafo orientato  $G'$  con due componenti fortemente connesse

Una **corda** di un cammino  $P_k$  o di un ciclo  $C_k$  è uno spigolo  $e = (v_{i_p}, v_{i_q}) \in E(G)$  tale che  $v_{i_p}$  e  $v_{i_q}$  appartengono al cammino o al ciclo, ma  $e$  non è uno spigolo del cammino o del ciclo. È evidente che una corda di un ciclo  $C_k$  induce altri due cicli  $C_x$  e  $C_y$  le cui lunghezze  $x$  e  $y$  sono tali che  $x + y = k + 2$ . Il ciclo  $C_3$  è il più piccolo ciclo su un grafo non orientato ed è necessariamente un ciclo privo di corde. Facendo riferimento ancora una volta al grafo riportato in Figura 3 possiamo osservare che esistono numerosissimi cicli, ma quasi tutti sono “tagliati” da corde che creano cicli più brevi al loro interno: ad esempio il ciclo  $C_6 = (v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_2)$  presenta tre corde, gli spigoli  $(v_3, v_8)$ ,  $(v_4, v_7)$  e  $(v_2, v_6)$ : ognuna delle tre corde permette di costruire altri due cicli, più piccoli del  $C_6$ .

Un grafo  $G$  si dice **cordale** se ogni ciclo di lunghezza maggiore o uguale a 4 in esso contenuto possiede almeno una corda in  $G$ . Il grafo rappresentato in Figura 3 non è un grafo cordale, visto che il ciclo  $C_4 = (v_2, v_6, v_7, v_8, v_2)$  non possiede alcuna corda in  $G$ .

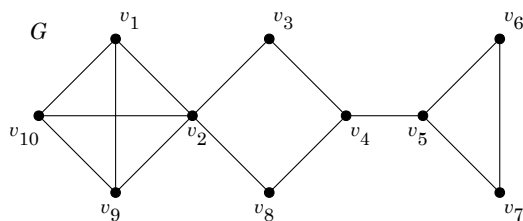
Un grafo non orientato  $G$  si dice **connesso** se per ogni coppia di vertici  $u, v \in V(G)$  esiste un cammino  $p : u \rightsquigarrow v$  che li collega. In un grafo orientato  $G$  due vertici  $u, v \in V(G)$  si dicono **fortemente connessi** se in  $G$  esistono due cammini  $p_1 : u \rightsquigarrow v$  e  $p_2 : v \rightsquigarrow u$ ; se tali cammini non esistono (o non esistono entrambi), ma i due vertici sono connessi da un cammino nel grafo corrispondente non orientato (lo stesso grafo, ma privo di orientazione sugli spigoli), allora i due vertici si dicono **debolmente connessi**. Se tutti i vertici di un grafo orientato sono a due a due fortemente connessi il grafo stesso si dice fortemente connesso; analogamente se tutti i vertici di un grafo orientato sono debolmente connessi, allora il grafo si dice debolmente connesso.

**Proposizione 3.** *La connessione e la connessione forte tra coppie di vertici di un grafo sono relazioni di equivalenza.*

*Dimostrazione.* Le relazioni di connessione e connessione forte su un grafo  $G$  godono delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e dunque sono relazioni di equivalente. Infatti:

- ogni vertice è connesso e fortemente connesso a se stesso (proprietà riflessiva);
- se  $u \in V(G)$  è connesso a  $v \in V(G)$ , allora è anche vero il contrario (proprietà simmetrica); infatti se esiste un cammino sul grafo non orientato da  $u$  a  $v$ , allora lo stesso cammino può anche essere percorso da  $v$  ad  $u$ ; nel caso di una coppia di vertici fortemente connessi su un grafo orientato esistono entrambi i cammini che portano da  $u$  a  $v$  e viceversa;
- se  $u$  è connesso a  $v$  mediante il cammino  $p_1$  e  $v$  è connesso a  $w$  con il cammino  $p_2$ , allora unendo i due cammini si ottiene il cammino  $p_3$  che connette  $u$  con  $w$  (proprietà transitiva); analogamente per la connessione forte su un grafo orientato.

□



**Figura 5:** Un grafo con un ponte, costituito dallo spigolo  $(v_4, v_5)$ , e tre punti di articolazione, i vertici  $v_2, v_4$  e  $v_5$

Dunque la relazione di connessione e quella di connessione forte inducono sull'insieme dei vertici  $V(G)$  delle *classi di equivalenza* che costituiscono una partizione di  $V(G)$ : tali classi sono denominate **componenti connesse**, nel caso della relazione di connessione, e **componenti fortemente connesse**, nel caso della relazione di connessione forte. I vertici che appartengono alla stessa componente connessa sono tutti mutuamente collegati da un cammino. Se due vertici appartengono a due componenti connesse distinte, allora vuol dire che non esiste nessun cammino che li collega. Analogamente nel caso della connessione forte per grafi orientati, diremo che due vertici appartengono alla stessa componente fortemente connessa se sono mutuamente raggiungibili mediante due cammini orientati.

In Figura 4 sono riprodotti due grafi,  $G$  non orientato e  $G'$  orientato. Si nota immediatamente che il grafo  $G$  è costituito da due componenti connesse: la prima è composta dai vertici  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ , mentre la seconda è composta dai rimanenti tre vertici  $v_5, v_6$  e  $v_7$ . Il grafo orientato  $G'$  è formato da un'unica componente debolmente connessa (il grafo non orientato ottenuto da  $G'$  senza considerare l'orientazione degli spigoli è connesso); tuttavia considerando l'orientazione degli spigoli si può facilmente osservare che lo stesso grafo è costituito da due componenti fortemente connesse: la prima è composta dai vertici  $v_1$  e  $v_2$ , mentre la seconda è composta da  $v_3, v_4$  e  $v_5$ .

Un **punto di articolazione** è un vertice di un grafo connesso o di una componente connessa di un grafo, tale che se venisse eliminato il grafo o la componente a cui tale vertice apparteneva, risulterebbero sconnessi. Ad esempio nel grafo  $G$  della Figura 4 il vertice  $v_6$  è un punto di articolazione per la componente connessa costituita dai vertici  $v_5, v_6$  e  $v_7$ , mentre la componente connessa costituita dai vertici  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$  è priva di punti di articolazione; una componente (o un grafo) si dice **biconnessa** se non possiede nessun punto di articolazione.

Un **ponte** è uno spigolo la cui eliminazione provocherebbe la sconnessione del grafo o di una sua componente connessa. Nel grafo  $G$  rappresentato in Figura 5 lo spigolo  $(v_4, v_5)$  è un ponte, mentre i vertici  $v_2, v_4$  e  $v_5$  sono tre punti di articolazione.

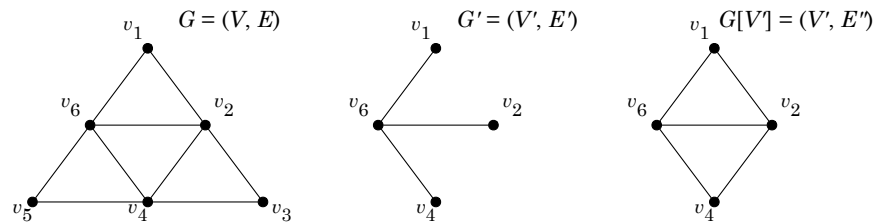
La **distanza**  $d_G(u, v)$  tra due vertici  $u, v \in V(G)$  di un grafo  $G$  è la lunghezza del cammino più breve che collega  $u$  e  $v$ . La più grande distanza tra una coppia di vertici di un grafo  $G$  è il **diametro** di  $G$ ; formalmente, indicando con  $|p|$  la lunghezza del cammino  $p$ , possiamo scrivere

$$\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V(G)} \min_{p: u \rightsquigarrow v} \{|p|\}$$

Ad esempio il diametro del grafo  $G$  rappresentato in Figura 5 è  $\text{diam}(G) = 5$ .

Un vertice è un **centro** del grafo  $G$  se la sua massima distanza dagli altri vertici del grafo è minima. Naturalmente in generale in un grafo il centro non è unico. Il **raggio** di  $G$ ,  $r(G)$ , è proprio la massima distanza di un vertice da un centro del grafo; formalmente possiamo scrivere

$$r(G) = \min_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$$



**Figura 6:** Il grafo di Hajos  $G$ , un sottografo  $G'$  di  $G$ , il sottografo indotto  $G[V']$

Ad esempio il grafo  $G$  in Figura 5 ha tre centri: i vertici  $v_3$ ,  $v_4$  e  $v_8$ ; per questi tre vertici risulta infatti  $r(G) = 3$ , mentre per ogni altro vertice  $v$  del grafo il raggio risulterebbe maggiore.

Sia  $\{V_1, V_2\}$  una partizione dell'insieme dei vertici  $V$  di un grafo  $G = (V, E)$ : dunque  $V = V_1 \cup V_2$  e  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . L'insieme  $F \subseteq E(G)$  di tutti gli spigoli che "attraversano" la partizione è un **taglio** per la partizione:  $F = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}$ .

Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Il grafo  $G' = (V', E')$  tale che  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$  è un **sottografo** di  $G$ . Sia  $W \subseteq V$  un sottoinsieme dei vertici di  $G$ . Il grafo  $G[W] = (W, E_W)$  costruito ponendo  $E_W = \{(u, v) \in E(G) : u, v \in W\}$  è il **sottografo indotto** su  $G$  dal sottoinsieme  $W$  dei vertici di  $G$ . Tra i due concetti c'è una differenza sostanziale: infatti mentre per costruire un sottografo qualsiasi, fissato il sottoinsieme dei vertici  $V' \subseteq V(G)$ , possiamo scegliere arbitrariamente gli spigoli tra quelli che in  $G$  hanno come estremi vertici di  $V'$ , nel costruire un sottografo indotto  $G[W]$  dal sottoinsieme  $W \subseteq V(G)$  siamo obbligati a scegliere *tutti* gli spigoli di  $E(G)$  che in  $G$  hanno come estremi i vertici di  $W$ .

In Figura 6 sono rappresentati il grafo  $G = (V, E)$  ed un suo sottografo  $G'$  costruendo scegliendo il sottoinsieme di vertici  $V' = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$  ed alcuni degli spigoli che collegano i vertici di  $V'$  in  $G$ ; nella stessa figura è anche rappresentato il sottografo indotto da  $V'$  su  $G$ ,  $G[V']$ , costruito dopo aver scelto arbitrariamente l'insieme dei vertici  $V'$ , selezionando tutti gli spigoli che in  $G$  univano coppie di vertici di  $V'$ .

Un **triangolo** di un grafo  $G$  è un sottografo indotto da una terna di vertici di  $G$  mutuamente adiacenti. In altre parole un sottografo  $G'$  di  $G$  è un triangolo se  $G' = K_3$ . Sia  $T$  un triangolo del grafo  $G$ ; un **triangolo esteso** di  $G$  relativo a  $T$  è il sottografo  $\hat{T}$  di  $G$  indotto dai vertici che formano un triangolo con almeno uno spigolo di  $T$ . Il grafo  $G$  in Figura 6 coincide con il triangolo esteso del triangolo indotto dai vertici  $v_2$ ,  $v_4$  e  $v_6$ .

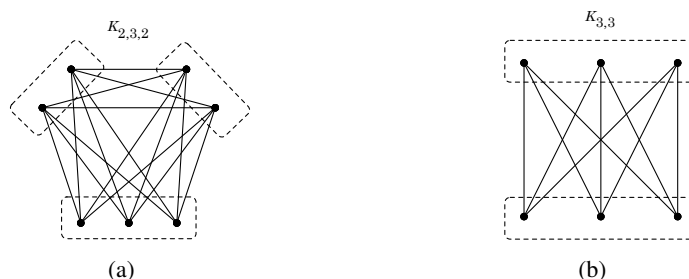
Un sottografo di completo massimale di  $G$  è una **clique**. Se il grafo  $G$  è completo allora contiene un'unica clique che coincide con il grafo stesso. È facile osservare che in un grafo privo di triangoli le clique coincidono con gli spigoli.

Un sottoinsieme massimale di vertici di  $G$  che non sono fra loro adiacenti è un **insieme indipendente**. Il grafo nullo con  $k$  vertici,  $N_k$ , contiene un solo insieme indipendente che coincide con l'insieme dei vertici del grafo.

Un **grafo multipartito completo** è il grafo  $K_{p_1, p_2, \dots, p_k}$  il cui insieme dei vertici è costituito da  $k$  insiemi indipendenti  $V_1, \dots, V_k$ , ciascuno con  $p_i = |V_i|$  elementi, e tali che  $(u, v) \in E(K_{p_1, p_2, \dots, p_k})$  se e solo se  $u \in V_i, v \in V_j$ , con  $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$ .

In Figura 7 sono rappresentati il grafo multipartito completo  $K_{2,3,2}$  ed il grafo bipartito completo  $K_{3,3}$  che, come vedremo in seguito, riveste una grande importanza nella caratterizzazione dei grafi che non possono essere disegnati sul piano senza intersecare fra loro due o più spigoli.

Un **cammino euleriano** è un cammino che passa una ed una sola volta per ogni spigolo del grafo; anche in questo caso è bene precisare che non tutti i grafi ammettono un cammino euleriano. Un **ciclo**



**Figura 7:** Il grafo tripartito completo  $K_{2,3,2}$  (a) e il grafo bipartito completo  $K_{3,3}$  (b)

**euleriano** è un ciclo (anche non semplice) che passa una sola volta per ogni spigolo del grafo; un grafo che ammette un ciclo di questo tipo è chiamato **grafo euleriano**. Il grafo in Figura 3 ammette, ad esempio, il cammino euleriano  $P = (v_3, v_4, v_6, v_5, v_4, v_7, v_6, v_2, v_3, v_8, v_2, v_1, v_8, v_7)$ , ma non ammette alcun ciclo euleriano.

I cammini di questo tipo sono stati studiati per la prima volta nel 1736 dal matematico Leonhard Euler che in quell'anno pubblicò un trattato di geometria in cui veniva risolto un famoso problema relativo ai ponti della città di Königsberg (l'attuale Kaliningrad, in Russia); è a questo famoso contributo di Eulero che si fa risalire la nascita della moderna teoria dei grafi. Il problema affrontato da Eulero chiedeva di individuare un percorso all'interno della città che consentisse di attraversare una volta soltanto tutti i sette ponti sul fiume Pregel (vedi Figura 8(a)).

Eulero formulò un modello basato su una schematizzazione analoga a quella che si potrebbe ottenere con un grafo e naturalmente andò oltre il problema dei ponti di Königsberg, proponendo una teoria in grado di caratterizzare i grafi dotati di un cammino euleriano. Per la prima volta Eulero formalizzò un problema di apparente natura geometrica, in termini del tutto indipendenti da concetti quali la misura di segmenti o di angoli, ma fortemente legati alla relazione di connessione reciproca esistente tra alcuni punti del piano (le zone della città collegate dai ponti sul fiume). In particolare possiamo riassumere alcuni dei risultati ottenuti da Eulero in questo campo formulando il seguente Teorema.

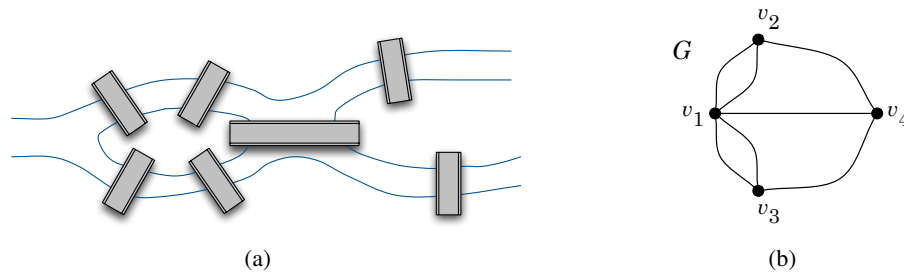
**Teorema 2** (Eulero). *Per ogni grafo non orientato  $G = (V, E)$  connesso risulta quanto segue:*

1. *Esiste un cammino euleriano in  $G$  se e solo se al massimo due vertici di  $V(G)$  hanno grado dispari.*
2. *Esiste un ciclo euleriano in  $G$  se e solo se tutti i vertici di  $V(G)$  hanno grado pari.*

Il problema dei ponti di Königsberg può essere rappresentato con il multigrafo di Figura 8(b), in cui le zone della città separate dal fiume costituiscono i vertici e gli spigoli sono i ponti che collegano tali zone. Appare così subito evidente che, in base a quanto viene affermato dal Teorema di Eulero, il grafo non ammette nessun cammino euleriano, visto che tutti i quattro vertici del grafo hanno grado dispari; pertanto possiamo concludere che non esiste nessun percorso all'interno della città di Königsberg che consenta di attraversare tutti e sette i ponti una volta soltanto.

### 3 Isomorfismo tra grafi e planarità

Due grafi  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  si dicono **isomorfi** se esiste una corrispondenza biunivoca (isomorfismo)  $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  tale che  $(u, v) \in E(G_1) \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G_2)$ . In questo caso



**Figura 8:** Una schematizzazione dei ponti della città di Königsberg sul fiume Pregel (a) e un multigrafo  $G$  i cui spigoli corrispondono ai ponti della città (b)

si scrive  $G_1 \cong G_2$ .

Un isomorfismo tra due grafi manda vertici adiacenti in vertici adiacenti; in questo modo, quindi, viene creata una corrispondenza biunivoca anche tra gli insiemi degli spigoli dei due grafi. In termini più informali possiamo dire che due grafi sono isomorfi se sono uguali a meno di una permutazione delle etichette assegnate ai vertici.

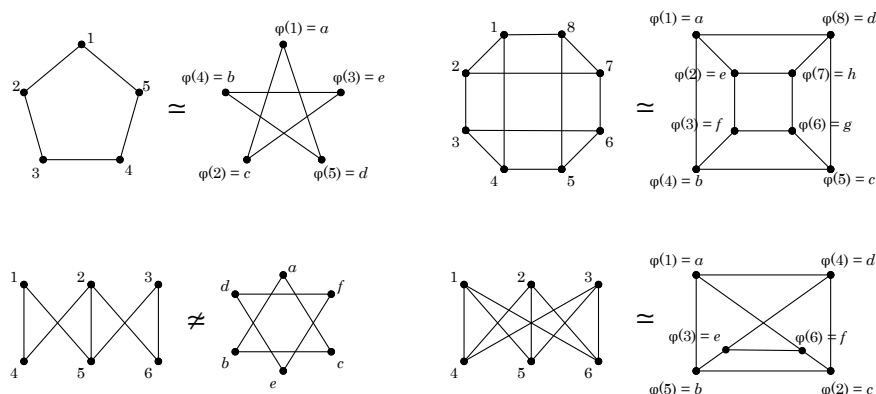
Esistono diverse proprietà caratteristiche di un grafo che risultano essere invarianti mediante isomorfismi:

1. il numero dei vertici  $|V(G)|$  non cambia trasformando il grafo in un grafo isomorfo: l'isomorfismo è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi dei vertici dei due grafi e dunque la cardinalità dei due insiemi  $V(G_1)$  e  $V(G_2)$  deve essere la stessa;
2. il numero degli spigoli del grafo: l'isomorfismo manda vertici adiacenti in vertici adiacenti ed è biunivoco, quindi anche il numero di spigoli deve rimanere invariato;
3. la distribuzione del grado dei vertici: se  $G$  ha  $k$  vertici di grado  $d$ , allora anche ogni grafo isomorfo a  $G$  deve possedere esattamente  $k$  vertici di grado  $d$ ; infatti se  $v \in V(G_1)$  è adiacente a  $u_1, \dots, u_k \in V(G_1)$ , allora  $\varphi(v) \in V(G_2)$  deve essere adiacente a  $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \in V(G_2)$  e non può essere adiacente a nessun altro vertice, per non compromettere la biunivocità della corrispondenza;
4. il numero di componenti connesse del grafo: se  $G$  è costituito da  $k$  componenti connesse, allora ogni grafo isomorfo a  $G$  deve essere composto dallo stesso numero di componenti.

In Figura 9 sono riportati alcuni esempi di isomorfismo tra coppie di grafi apparentemente molto diversi fra loro. La figura mette in evidenza che due grafi sono isomorfi se il disegno di uno dei due può essere portato a coincidere con il disegno dell'altro senza "rompere" le connessioni tra i vertici del grafo e senza aggiungere o cancellare vertici o spigoli.

Il problema decisionale GRAPHISOMORPHISM, dati due grafi  $G_1$  e  $G_2$ , chiede di stabilire se sono isomorfi. Il problema è NP, dal momento che data una corrispondenza biunivoca tra  $V(G_1)$  e  $V(G_2)$  è facile costruire un algoritmo polinomiale in grado di verificare se tale corrispondenza sia un isomorfismo tra grafi. Il problema, comunque, costituisce un caso piuttosto interessante dal momento che fino ad oggi non è stato possibile stabilire se appartenga alla classe di complessità P o NPC.

Le proprietà invarianti per isomorfismi descritte poc' anzi costituiscono quindi un valido strumento per stabilire che per una determinata coppia di grafi non può esistere un isomorfismo che trasformi un



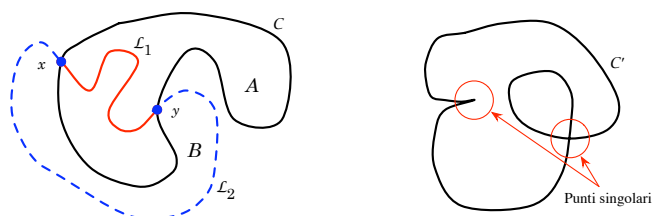
**Figura 9:** Coppie di grafi isomorfi e non isomorfi

grafo nell'altro. Si tratta di condizioni necessarie, ma non sufficienti per stabilire che due grafi siano isomorfi; tuttavia è facile produrre algoritmi in grado di eseguire tali verifiche in tempo polinomiale e risolvere così in modo piuttosto efficiente alcune istanze del problema GRAPHISOMORPHISM.

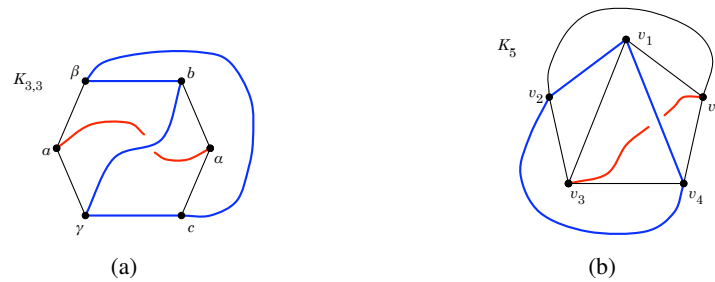
Un grafo è **planare** se è isomorfo ad un grafo che può essere disegnato sul piano senza intersecare fra loro gli spigoli. Dal punto di vista applicativo stabilire se un grafo sia o meno planare ha una grande rilevanza: ad esempio nella visualizzazione della struttura di una rete di comunicazione molto ampia o del diagramma “entità/relazioni” di una base dati relazionale complessa, si ottiene una migliore leggibilità del disegno rappresentando il grafo in modo planare, evitando cioè le intersezioni tra gli spigoli. Anche nella progettazione di circuiti elettronici integrati è importante poter stabilire se il circuito (che può essere rappresentato mediante un grafo i cui vertici corrispondono ai componenti del circuito, collegati fra loro da connessioni elettriche) possa essere stampato su una sola “piastra” senza per questo introdurre intrecci tra le connessioni elettriche, o se debba essere disposto inevitabilmente su più strati; in quest'ultimo caso è di grande interesse stabilire il minimo numero di strati su cui possano essere disposte le “componenti planari” del circuito elettronico, per ridurre al massimo il costo di produzione e l'ingombro del circuito stesso.

Una *curva chiusa semplice* sul piano  $\mathbb{R}^2$  è una curva continua, che non passa due volte per lo stesso punto (senza intersezioni o “cuspidi”). Per provare alcune proprietà importanti sui grafi planari è utile tenere presente il seguente risultato:

**Teorema 3** (Della curva di Jordan). *Se  $C$  è una curva chiusa semplice nel piano allora  $C$  divide il piano in due regioni distinte  $A$  e  $B$  che hanno  $C$  come frontiera comune. Se  $x \in A$  e  $y \in B$  allora ogni*



**Figura 10:** Un esempio di curva chiusa semplice  $C$  che divide il piano in due aree  $A$  e  $B$ ; le curve  $L_1$  e  $L_2$  hanno entrambe in comune con  $C$  soltanto i punti  $x$  e  $y$  e sono completamente contenute nelle aree  $A$  e  $B$  rispettivamente. La curva  $C'$  non è una curva chiusa semplice perché possiede due singolarità.



**Figura 11:** È impossibile tracciare sul piano un disegno del grafo  $K_{3,3}$  (a) e del grafo  $K_5$  (b) senza intersecare due spigoli

*curva continua che passa per  $x$  e per  $y$  interseca  $C$ .*

La tesi del Teorema della curva di Jordan è piuttosto intuitiva, tanto da far sembrare banale il risultato ottenuto dal teorema stesso; invece sono state necessarie diverse decine di anni e numerosi tentativi andati a vuoto (compresi quelli del celeberrimo matematico Bernard Bolzano e dello stesso Camille Jordan) prima che Oswald Veblen riuscì a dimostrare il teorema nel 1905. Un utile corollario al teorema è il seguente:

**Corollario 1.** *Siano  $x$  e  $y$  due punti distinti di una curva chiusa semplice  $C$  sul piano  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\mathcal{L}$  una curva continua nel piano  $\mathbb{R}^2$  che unisce i due punti  $x$  e  $y$ , priva di ulteriori punti in comune con  $C$ . Allora  $\mathcal{L}$  è interamente contenuta all'interno di una delle due regioni definite da  $C$ .*

Sfruttando questi risultati possiamo provare i seguenti teoremi.

**Teorema 4.** *Il grafo bipartito completo  $K_{3,3}$  non è planare.*

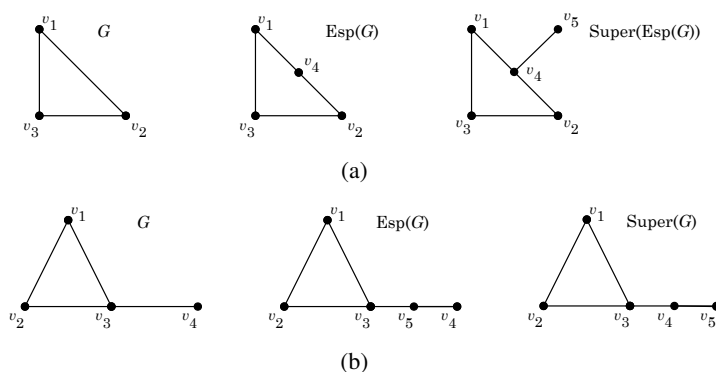
*Dimostrazione.* Possiamo provare a disegnare sul piano il grafo  $K_{3,3}$  come in Figura 11(a). Sia  $C$  la curva chiusa semplice che passa per i vertici  $\beta, b, \gamma, c$ ; dunque i vertici  $a$  e  $\alpha$  si trovano rispettivamente nell'area esterna e nell'area interna del piano suddiviso dalla curva  $C$  e non appartengono a tale curva. Dunque per il teorema della curva di Jordan qualunque spigolo che unisca i vertici  $a$  e  $\alpha$  deve intersecare la curva  $C$  su cui giacciono gli altri spigoli di  $K_{3,3}$ . Quindi  $K_{3,3}$  non può essere disegnato sul piano senza intersezioni tra gli spigoli e dunque non è planare.  $\square$

**Teorema 5.** *Il grafo completo  $K_5$  non è planare.*

*Dimostrazione.* Anche in questo caso possiamo provare a disegnare sul piano il grafo  $K_5$  senza intersecare fra loro due spigoli. Così facendo possiamo ottenere il disegno riportato in Figura 11(b), in cui sono stati tracciati tutti gli spigoli, tranne  $(v_3, v_5)$ . I vertici  $v_3$  e  $v_5$  si trovano rispettivamente nell'area interna e nell'area esterna del piano, separate fra loro dalla curva chiusa semplice passante per i vertici  $v_1, v_4, v_2$ . Dunque qualunque spigolo che unisca  $v_3$  e  $v_5$  non potrà che intersecare tale curva chiusa. Pertanto non è possibile disegnare nel piano  $K_5$ .  $\square$

**Teorema 6.** *Ogni sottografo di un grafo planare è planare.*

*Dimostrazione.* Se il grafo  $G$  è planare, allora è evidente che qualunque grafo ottenuto da  $G$  rimuovendo alcuni degli spigoli o alcuni dei vertici (e gli spigoli incidenti su di essi), non si ottiene altro che un altro grafo planare.  $\square$



**Figura 12:** (a) Un grafo  $G$ , un'espansione di  $G$  ed un supergrafo dell'espansione di  $G$ ; si noti che il supergrafo dell'espansione non può essere ottenuto come un'espansione di un supergrafo di  $G$ . (b) Un grafo  $G$ , un'espansione di  $G$  e un supergrafo di  $G$ ; in questo caso l'espansione e il supergrafo sono fra loro isomorfi.

Il grafo  $H$  è un **supergrafo** di  $G$  se  $G$  è un sottografo di  $H$ . Vale quindi il seguente corollario al precedente Teorema:

**Corollario 2.** *Ogni supergrafo  $H$  di un grafo  $G$  non planare non è planare.*

*Dimostrazione.* Procediamo per assurdo. Supponiamo che  $H$  sia planare. Allora per il Teorema 6 il suo sottografo  $G$  deve essere planare. Ma  $G$  non è planare per ipotesi, quindi anche  $H$  non può essere planare.  $\square$

Dato un grafo  $G$ , un'espansione di  $G$  è un grafo  $G'$  ottenuto da  $G$  aggiungendo uno o più vertici di grado due sugli spigoli di  $G$ : se  $(u, v) \in E(G)$  e  $w \notin V(G)$ , si ottiene un'espansione di  $G$  aggiungendo il vertice  $w$  al grafo  $G$  e sostituendo lo spigolo  $(u, v)$  con gli spigoli  $(u, w)$  e  $(w, v)$ .

È opportuno osservare che in generale un'espansione di  $G$  non è un supergrafo di  $G$  e viceversa; tuttavia un'espansione di  $G$  può essere isomorfa ad un supergrafo di  $G$ .

**Teorema 7.** *Ogni espansione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$  è non planare.*

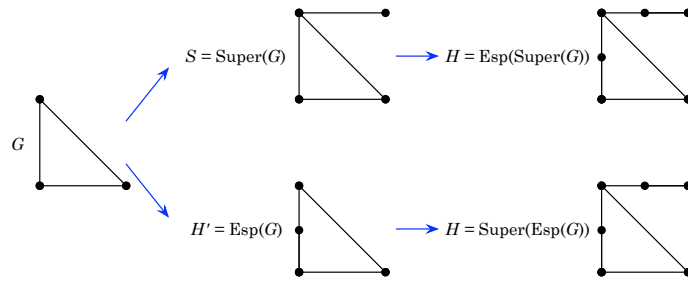
*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che  $H$  sia planare e che al tempo stesso sia un'espansione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$ . Eliminiamo da  $H$  tutti i vertici aggiunti a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$  per ottenere l'espansione  $H$  e sostituiamoli con uno spigolo. In questo modo otteniamo il grafo  $K_5$  o il grafo  $K_{3,3}$  di cui  $H$  è espansione; se  $H$  è planare anche il grafo da cui è derivato  $H$  deve essere planare: se esiste un disegno planare di  $H$  allora basta seguire lo stesso tracciato degli spigoli di  $H$  anche per disegnare sul piano gli spigoli di ogni grafo di cui  $H$  è espansione. Dunque anche  $K_5$  e  $K_{3,3}$  risulterebbero planari. Ma questo è contraddittorio, perché abbiamo provato con i Teoremi 4 e 5 che  $K_5$  e  $K_{3,3}$  sono grafi non planari. Quindi, in conclusione, qualunque espansione  $H$  di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$  non può essere planare.  $\square$

Dal teorema precedente segue facilmente il seguente corollario.

**Corollario 3.** *Ogni supergrafo di un'espansione di  $K_5$  o  $K_{3,3}$  è non planare.*

*Dimostrazione.* La tesi segue immediatamente dal Teorema 7 e dal Corollario 2, che afferma che ogni supergrafo di un grafo non planare è non planare.  $\square$





**Figura 13:** Un esempio utile a visualizzare il procedimento riportato nella dimostrazione della Proposizione 4.

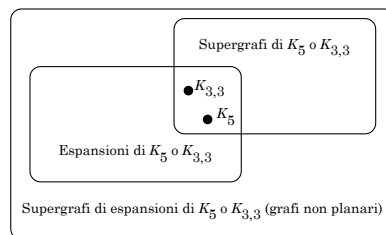
Fin qui siamo riusciti a dimostrare che se un determinato grafo  $G$  contiene come “nucleo” un grafo  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , ossia se  $K_5$  o  $K_{3,3}$  sono sottografi di  $G$  o se  $G$  è ottenuto come espansione o supergrafo di un’espansione di  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , allora il grafo  $G$  è sicuramente non planare. Questo risultato viene rafforzato enormemente dimostrando che tale condizione non è soltanto sufficiente, ma è addirittura necessaria. Il teorema dovuto al celebre matematico polacco Kazimierz Kuratowski afferma proprio questo. Per la dimostrazione del teorema, piuttosto articolata e complessa, si rimanda ai testi [3] e [6] citati in bibliografia. Riportiamo di seguito l’enunciato di questo importantissimo teorema di caratterizzazione per i grafi planari.

**Teorema 8** (Kuratowski). *Ogni grafo non planare è un supergrafo di un’espansione di  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .*

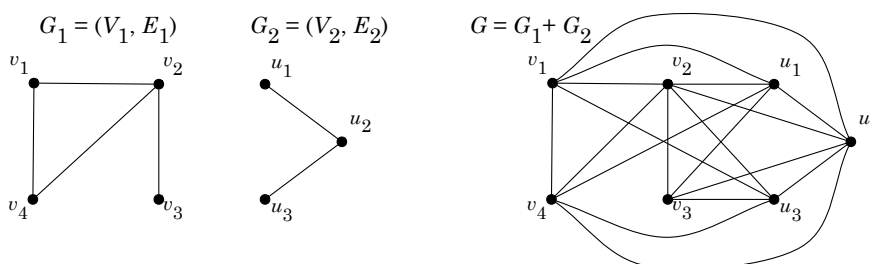
A conclusione di questo discorso e per sottolineare meglio la portata del Teorema di Kuratowski, è opportuno osservare che ogni espansione di un supergrafo è anche il supergrafo di un’espansione, mentre non è vero il contrario: esistono supergrafi di espansioni che non sono espansioni di supergrafi (si veda ad esempio il grafo  $G$  in Figura 12(a)).

**Proposizione 4.** *Dato un grafo  $G$  risulta che ogni espansione di un supergrafo di  $G$  è anche il supergrafo di un’espansione di  $G$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $S$  un supergrafo di  $G$ :  $S$  è ottenuto a partire da  $G$  aggiungendo vertici e spigoli, ma senza rimuovere alcun vertice o spigolo da  $G$ . Un’espansione  $H$  di  $S$  si ottiene sostituendo in  $S$  alcuni spigoli  $(u, v)$  e rimpiazzandoli con un nuovo vertice  $w$  ed una coppia di spigoli  $(u, w)$  e  $(w, v)$ . Gli spigoli  $(u, v)$  sostituiti in  $S$  possono essere spigoli originali di  $G$  o spigoli aggiunti a  $G$  per ottenere  $S$ . Per ottenere  $H$  è possibile quindi espandere  $G$  sostituendo in  $G$  gli spigoli  $(u, v)$  con le coppie  $(u, w)$  e  $(w, v)$  ottenendo l’espansione  $H'$  e successivamente aggiungere ad  $H'$  gli spigoli ed i vertici mancanti, ottenendo così un supergrafo  $H$  di  $H'$ . □



**Figura 14:** Gli insiemi dei supergrafi, delle espansioni e dei supergrafi delle espansioni di  $K_5$  e  $K_{3,3}$ .



**Figura 15:** Il grafo  $G$  ottenuto come somma di  $G_1$  e  $G_2$

La relazione esistente tra gli insiemi delle espansioni, dei supergrafi e dei supergrafi di espansioni di  $K_5$  e  $K_{3,3}$  può essere efficacemente rappresentato come in Figura 14.

## 4 Operazioni sui grafi

Intendiamo definire alcuni operatori che ci consentono di compiere delle operazioni su uno o più grafi al fine di ottenere come risultato un altro grafo. Il **grafo complementare** di  $G = (V, E)$  è il grafo  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  definito ponendo  $\overline{E} = \{(u, v) : u, v \in V \text{ e } (u, v) \notin E(G)\}$ ; il grafo complementare di  $G$  è dunque il grafo con gli stessi vertici di  $G$ , ma con tutti gli spigoli che in  $G$  non sono presenti. Due vertici adiacenti in  $G$  sono sicuramente non adiacenti in  $\overline{G}$ , mentre non è detto che due vertici connessi da un cammino in  $G$  non siano connessi anche in  $\overline{G}$ .

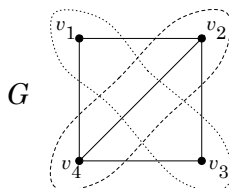
Dati due grafi  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  possiamo definire il **grafo unione**  $G = G_1 \cup G_2$  ottenuto ponendo  $V(G) = V_1 \cup V_2$  e  $E(G) = E_1 \cup E_2$ . Se  $G_1$  e  $G_2$  sono connessi, il grafo unione è costituito quindi da due componenti connessi: non c'è nessuno spigolo che unisce i vertici dell'una e dell'altra componente.

La **somma** di  $G_1$  e  $G_2$  è il grafo  $G = G_1 + G_2$  definito ponendo anche in questo caso  $V(G) = G_1 \cup G_2$ , ma  $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2$ : a differenza dell'unione, la somma è data aggiungendo tutti i possibili spigoli tra coppie di vertici appartenenti ai due grafi sommati (vedi Figura 15).

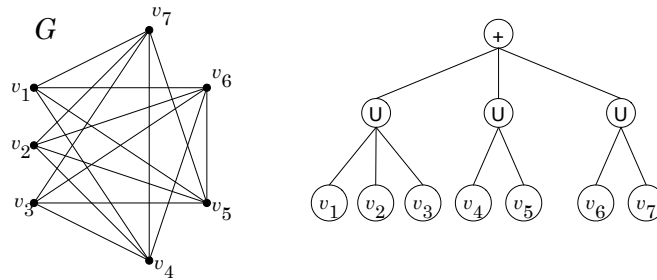
Possiamo definire anche il **prodotto cartesiano** dei due grafi  $G_1$  e  $G_2$ ,  $G = G_1 \times G_2$ , ponendo  $V(G) = V_1 \times V_2$  e  $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in E(G)$  se e solo se  $(u_1, v_1) \in E_1$  e  $(u_2, v_2) \in E_2$ .

Un **modulo** di un grafo  $G$  è un sottoinsieme  $M$  di  $V(G)$  tale che tutti i vertici di  $M$  sono adiacenti agli stessi vertici di  $V(G) \setminus M$ ; in altre parole se  $M$  è un modulo, allora ogni vertice  $v \in V(G) \setminus M$  è adiacente a tutti i vertici di  $M$  o a nessuno di essi.

Un modulo  $M$  si dice **forte** se per ogni altro modulo  $A$  dello stesso grafo risulta  $M \cap A = \emptyset$  oppure  $M \cap A = M$  o  $M \cap A = A$ . Ad esempio nel grafo in Figura 16 gli unici moduli non banali sono costituiti dagli insiemi di vertici  $\{1, 3\}$  e  $\{2, 4\}$ ; nessuno dei due moduli è di tipo forte.



**Figura 16:** Un grafo  $G$  con due moduli



**Figura 17:** Un grafo  $G$  ed il suo albero di decomposizione modulare

In un grafo non connesso  $G$  i moduli forti massimali sono le componenti connesse  $G_1, \dots, G_p$  del grafo. In tal caso risulta  $G = G_1 \cup \dots \cup G_p$  e il grafo  $G$  si dice **parallelo**. I moduli, i moduli forti e i moduli forti massimali sono gli stessi di  $\overline{G}$ , quindi se  $\overline{G}$  non è connesso i moduli forti massimali di  $G$  sono le componenti connesse  $G_1, \dots, G_p$  di  $\overline{G}$ . In questo caso risulta  $G = G_1 + \dots + G_p$  e il grafo  $G$  si dice **seriale**.

Possiamo distinguere tre tipi di moduli  $M$  in un grafo  $G$ :

- $M$  è un **modulo parallelo** se il sottografo di  $G$  indotto da  $M$ ,  $G[M]$ , non è connesso;
- $M$  è un **modulo seriale** se il complemento del sottografo di  $G$  indotto da  $M$ ,  $\overline{G[M]}$ , non è connesso;
- $M$  è un **modulo neighborhood** se sia  $G[M]$  che  $\overline{G[M]}$  sono connessi.

Utilizzando le operazioni di somma e unione e sfruttando le definizioni di modulo appena proposte, possiamo costruire un **albero di decomposizione modulare** di un grafo, suddividendolo iterativamente in moduli seriali, paralleli e *neighborhood*. La radice dell'albero è il grafo originale, i nodi intermedi sono i moduli della decomposizione (seriali, paralleli o *neighborhood*) e le foglie sono i singoli vertici del grafo. In Figura 17 è riportato un esempio di decomposizione modulare: il grafo  $G$  è costituito da un unico modulo seriale che si decompone in tre moduli paralleli, ottenuti dall'unione di moduli costituiti da vertici isolati. Un grafo  $G$  come quello rappresentato in Figura 17 si dice *seriale parallelamente decomponibile*: il grafo è infatti ottenuto dalla somma (composizione seriale) di tre moduli paralleli.

## 5 Alberi e foreste

Una **foresta** è un grafo aciclico. Un grafo aciclico connesso è invece un **albero**: una foresta è quindi un grafo ottenuto dall'unione di alberi. Un albero può anche essere definito ricorsivamente come segue:

1.  $G = (\{v\}, \emptyset)$  è un albero;
2. se  $G_1$  e  $G_2$  sono alberi, allora  $G = (V, E)$  definito ponendo  $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ ,  $E = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(v_1, v_2)\}$ , con  $v_1 \in V(G_1)$  e  $v_2 \in V(G_2)$ , è un albero.

Le due definizioni sono coerenti, infatti dalla definizione ricorsiva si può ricavare facilmente che un albero è sicuramente un grafo connesso (è costituito da un unico vertice isolato, oppure dalla

connessione mediante un solo spigolo di due alberi a loro volta connessi) ed aciclico (nella costruzione di un albero a partire da due alberi preesistenti, si aggiunge un solo spigolo che non può quindi indurre un ciclo nel grafo derivato). D'altra parte rimuovendo uno spigolo da un albero (un grafo connesso e aciclico) si ottengono due grafi connessi ed aciclici distinti.

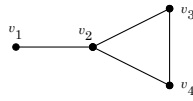
La definizione ricorsiva mette in evidenza una importante proprietà che caratterizza gli alberi: un albero  $T = (V, E)$  tale che  $|V(T)| = n$  ha esattamente  $n - 1$  spigoli:  $|E(T)| = n - 1$ . Possiamo dimostrarla facilmente per induzione osservando che la proprietà è sicuramente vera per alberi banali costituiti da un unico vertice; in tal caso infatti  $|V(T)| = 1$  e  $|E(T)| = 0$ . Ogni altro albero è ottenuto da due alberi con l'aggiunta di uno spigolo che unisce un vertice dell'uno e dell'altro grafo; dunque se l'albero  $T$  è ottenuto da  $T_1$  e  $T_2$ , allora la cardinalità dell'insieme dei vertici sarà pari a  $n = n_1 + n_2$ , dove  $n_1 = |V(T_1)|$  e  $n_2 = |V(T_2)|$ ; inoltre se per ipotesi induttiva la proprietà vale sia per  $T_1$  che  $T_2$  e dunque  $|E(T_1)| = m_1 = n_1 - 1$  e  $|E(T_2)| = m_2 = n_2 - 1$ , allora  $|E(T)| = m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$ .

In un albero  $T$  due vertici qualsiasi  $u$  e  $v$  sono connessi da un unico cammino  $p : u \rightsquigarrow v$ . Che tale cammino necessariamente esista è dovuto al fatto che  $T$  è connesso e dunque per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega. D'altra parte, fissati  $u$  e  $v$ , il cammino che li collega è sicuramente unico, perché se per assurdo ne esistesse un altro, ad esempio  $p' : u \rightsquigarrow v$ , allora in  $T$  esisterebbe un ciclo, il che è una contraddizione dal momento che abbiamo assunto che  $T$  sia un albero, ossia un grafo connesso e aciclico.

L'aciclicità e la connessione di un albero  $T$  sono due caratteristiche strettamente legate al numero di spigoli di  $T$ . Infatti aggiungendo un qualsiasi spigolo a  $T$  si perde la aciclicità, mentre eliminando un qualsiasi spigolo da  $T$  si perde la connessione. Entrambe le proprietà possono essere facilmente dimostrate facendo ricorso alla unicità del cammino che unisce una coppia di vertici in un albero  $T$ . Dal momento che per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li connette in  $T$ , aggiungendo un altro spigolo tra i due vertici (se non sono già adiacenti), si introdurrebbe un ciclo nel grafo. Viceversa, eliminando uno spigolo, ad esempio lo spigolo  $(u, v) \in E(T)$ , si sconnettono i vertici  $u$  e  $v$ : dal momento che il cammino che li connetteva era unico ed era quindi costituito dal solo spigolo  $(u, v)$ , l'eliminazione di tale spigolo introduce nel grafo due componenti non connesse.

Si può provare anche l'implicazione opposta: un grafo connesso tale che rimuovendo uno spigolo perda la proprietà di essere connesso è un albero; ed anche un grafo aciclico che perda l'aciclicità con la sola aggiunta di uno spigolo è un albero. Nel primo caso infatti se rimuovendo uno spigolo qualsiasi si sconnette il grafo in due componenti, allora questo significa che ogni coppia di vertici nel grafo è collegata da un solo cammino, infatti eliminando uno degli spigoli da tale cammino si provoca la perdita di connessione almeno fra due vertici del grafo. Dunque tale grafo deve essere necessariamente anche aciclico, oltre che connesso, altrimenti per qualche coppia di vertici esisterebbero almeno due cammini che li collegano. Nel secondo caso se aggiungendo uno spigolo qualsiasi al grafo si introduce un ciclo, vuol dire che ogni coppia di vertici è già collegata da un cammino; pertanto il grafo è anche connesso, oltre che aciclico.

Osserviamo infine che anche la relazione che lega la cardinalità dell'insieme dei vertici alla cardinalità dell'insieme degli spigoli in un albero  $T = (V, E)$  è una proprietà che caratterizza in modo forte gli alberi. Infatti è sufficiente che un grafo  $G = (V, E)$  sia connesso e che valga la relazione  $|E| = |V| - 1$  per provare che  $G$  è un albero, ossia che  $G$  è aciclico. Lo si può provare per induzione. Innanzi tutto è facile osservare che un grafo con un solo vertice è connesso e in tal caso vale la proprietà  $|E| = |V| - 1$ : tale grafo banale è sicuramente aciclico. Un grafo connesso con due soli vertici  $u$  e  $v$  ha esattamente uno spigolo che collega  $u$  e  $v$ ; dunque anche in questo caso il grafo è connesso, vale la proprietà  $|E| = |V| - 1$  e il grafo è aciclico. Supponiamo che ogni grafo connesso con  $n$  vertici tale che  $|E| = |V| - 1$  sia aciclico e dimostriamo che la stessa proprietà vale anche per un grafo con-



**Figura 18:** Controesempio per la Proposizione 5: un grafo  $G$  con  $\delta(G) = 1$  che possiede un ciclo

nesso con un vertice ed uno spigolo in più: la proprietà è ovvia, dal momento che per conservare la connessione del grafo aggiungendo un vertice si dovrà aggiungere anche uno spigolo che collega tale vertice ad un qualsiasi vertice del grafo; dunque l'aggiunta di tale spigolo non può introdurre un ciclo nel grafo. Quindi ogni grafo connesso  $G = (V, E)$ , tale che  $|E| = |V| - 1$ , è un albero.

Possiamo anche provare che ogni grafo aciclico  $G = (V, E)$ , tale che  $|E| = |V| - 1$  è un albero. Anche in questo caso possiamo procedere per induzione sul numero di vertici di  $G$ . Un grafo aciclico con un solo vertice non può che essere connesso; anche un grafo aciclico con due soli vertici, per il quale valga la proprietà  $|E| = |V| - 1$ , non può che essere connesso: l'unico spigolo del grafo collegherà necessariamente i due vertici del grafo, se assumiamo che il grafo sia aciclico. Supponiamo che un grafo aciclico con  $n$  vertici, tale che  $|E| = n - 1$ , sia connesso; allora aggiungendo un vertice al grafo ed uno spigolo (al fine di conservare la proprietà  $|E| = |V| - 1$ ), per non introdurre un ciclo aggiungendo il nuovo spigolo, non possiamo connettere fra loro due vertici che erano già connessi da un cammino; dunque il nuovo spigolo non può che unire il nuovo vertice ad un vertice che già apparteneva al grafo; dunque anche il grafo aciclico con  $n + 1$  vertici (ed  $n$  spigoli) è connesso. Dunque è un albero.

Possiamo riepilogare i risultati sopra esposti, formulando il seguente Teorema di caratterizzazione degli alberi.

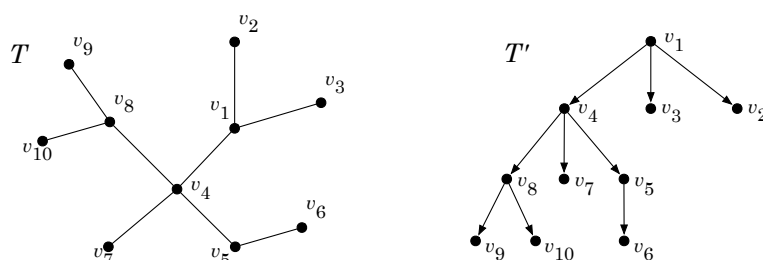
**Teorema 9.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $G$  è un albero;
2. due vertici qualsiasi di  $G$  sono connessi da un unico cammino semplice;
3.  $G$  è connesso, ma se qualunque spigolo di  $G$  venisse rimosso, allora  $G$  diventerebbe non connesso;
4.  $G$  è connesso e  $|E| = |V| - 1$ ;
5.  $G$  è aciclico e  $|E| = |V| - 1$ ;
6.  $G$  è aciclico, ma se venisse aggiunto uno spigolo qualsiasi il grafo risultante non sarebbe più aciclico.

I teoremi di caratterizzazione sono spesso un utile supporto teorico alle applicazioni: è frequente infatti che dal punto di vista algoritmico sia difficile verificare le proprietà con cui è stato definito un certo oggetto; i teoremi di caratterizzazione offrono quindi delle proprietà equivalenti che spesso presentano degli aspetti la cui verifica è più semplice da un punto di vista algoritmico.

**Proposizione 5.** Dato un grafo  $G$ , se  $\delta(G) > 1$  allora il grafo contiene almeno un ciclo.

*Dimostrazione.* Ricordiamo che con  $\delta(G)$  si indica il minimo grado dei vertici di  $G$ . Supponiamo per assurdo che  $\delta(G) > 1$  e che  $G$  non contenga nemmeno un ciclo. Allora  $G$  è una foresta. Dunque tutti i suoi vertici hanno grado nullo (foresta priva di spigoli), oppure esisterà almeno una foglia nella



**Figura 19:** Un albero libero  $T$  e l'albero con radice  $T'$  ottenuto scegliendo  $v_1$  come radice

foresta, ossia almeno un vertice di grado 1. In entrambi i casi si contraddice l'ipotesi che  $\delta(G) > 1$ . Quindi  $G$  non è una foresta e deve possedere almeno un ciclo.  $\square$

Osserviamo che la Proposizione 5 offre una condizione sufficiente, ma non necessaria affinché il grafo  $G$  contenga almeno un ciclo. Infatti  $G$  può contenere cicli anche se  $\delta(G) \leq 1$ , come risulta evidente nel grafo in Figura 18.

Dato un albero  $T = (V, E)$  è possibile selezionare arbitrariamente un vertice qualsiasi  $r \in V(T)$  e, a partire da tale vertice, orientare tutti gli spigoli del grafo in modo naturale, percorrendo i cammini che da  $r$  conducono ad ogni altro vertice di  $T$ . Si ottiene in questo modo un **albero orientato**  $T'$ ; quando non sarà chiaro dal contesto per indicare un albero non orientato potremo usare il termine **albero libero**. Il vertice  $r$ , l'unico vertice sorgente di  $T'$ , è detto **radice** dell'albero. I vertici pozzo (ne esiste almeno uno in  $T'$ ) sono chiamati **foglie** dell'albero. Esiste un unico cammino semplice che dalla radice  $r$  porta ad ogni foglia dell'albero. In Figura 19 è rappresentato un albero libero  $T$  ed un albero con radice  $T'$  ottenuto da  $T$  scegliendo il vertice  $v_1$  come radice ed imponendo l'orientazione naturale agli spigoli, percorrendo i cammini che da  $v_1$  conducono alle foglie dell'albero (i vertici  $v_2, v_3, v_6, v_7, v_9, v_{10}$ ). Naturalmente da uno stesso albero libero  $T$  è possibile ottenere  $n = V(T)$  alberi orientati differenti, tanti quante sono le possibili scelte differenti della radice.

In un albero orientato  $T = (V, E)$ , se  $(u, v) \in E(T)$ , il vertice  $u$  si dice **padre** di  $v$  e, al tempo stesso, il vertice  $v$  è un **figlio** di  $u$ ; le foglie dell'albero sono i vertici privi di figli. In un albero orientato è facile dimostrare che  $|E| = |V| - 1$ , dal momento che ogni vertice ha un unico spigolo entrante, tranne la radice che non ha nessuno spigolo entrante; dunque il numero degli spigoli  $m = |E|$  è pari al numero dei vertici  $n = |V|$  meno 1.

Se esiste un cammino  $p : u \rightsquigarrow v$ , allora  $v$  è un **discendente** di  $u$  e il vertice  $v$  è un **antenato** di  $u$ . La stessa relazione di padre/figlio non può essere stabilita su un grafo generico perché la presenza di cicli non permetterebbe di determinare univocamente il padre di un vertice.

Un **sottoalbero**  $T'$  dell'albero  $T = (V, E)$  è un sottografo di  $T$  che sia un albero; in un albero orientato  $T$  il sottoalbero con radice in  $v \in V(T)$  è il sottografo  $T'$  di  $T$  indotto da  $v$  e da tutti i suoi discendenti.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Andreas Brandstädt, Van Bang Le, Jeremy P. Spinrad, *Graph Classes – A survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [2] Ottavio D'Antona, *Introduzione alla Matematica Discreta*, Apogeo, 1999.

- [3] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2000.
- [4] Alan Gibbons, *Algorithmic graph theory*, Cambridge University Press, 1994.
- [5] Peter Gritzmann, René Brandenberg, *Alla ricerca della via più breve. Un'avventura matematica*, Springer, 2005.
- [6] Frank Harary, *Graph Theory*, Addison–Wesley, 1999.
- [7] Sriram Pemmaraju, Stephen Skiena, *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Cambridge University Press, 2003.
- [8] Richard J. Trudeau, *Introduction to Graph Theory*, Dover Publications Inc., New York, 1993.