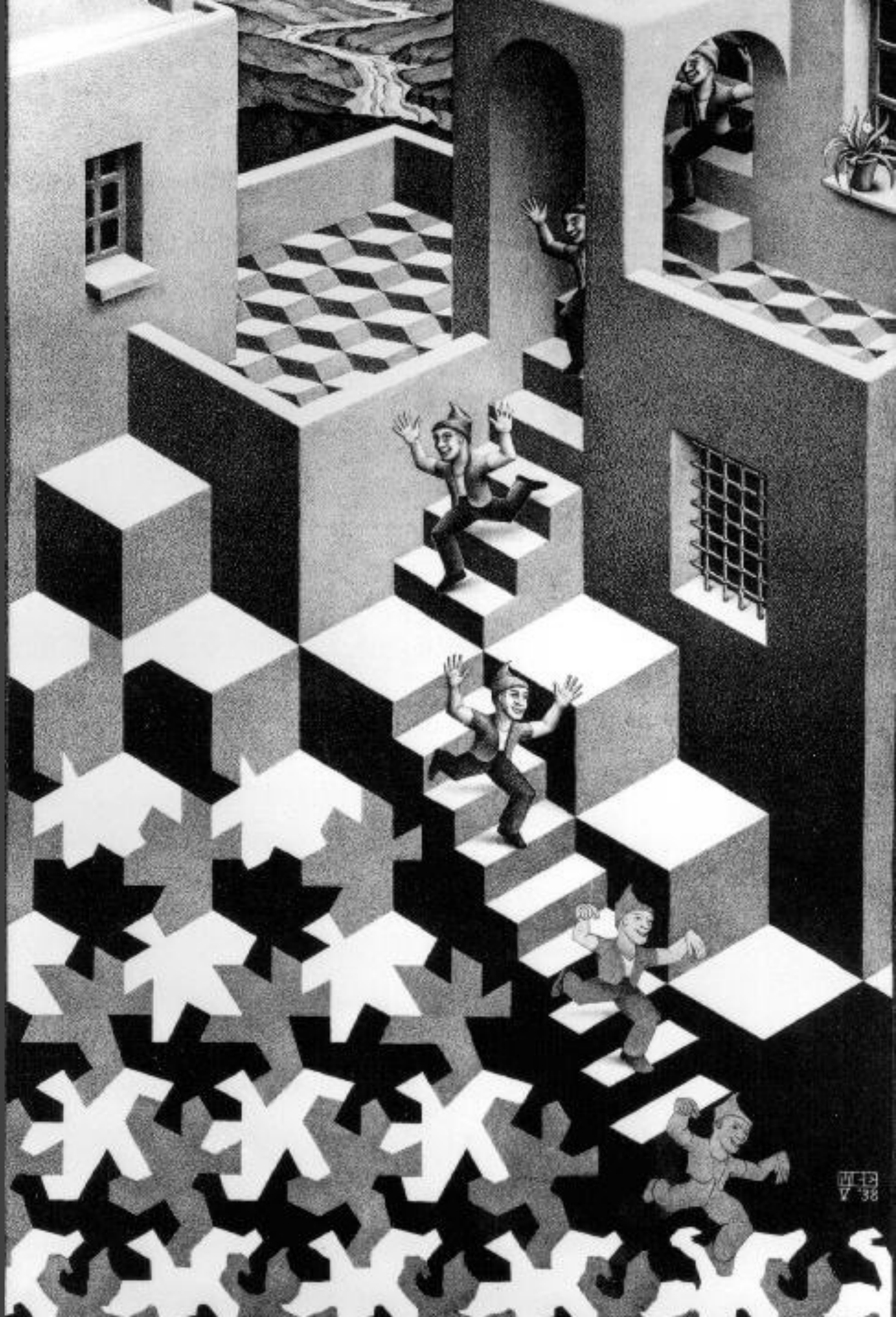
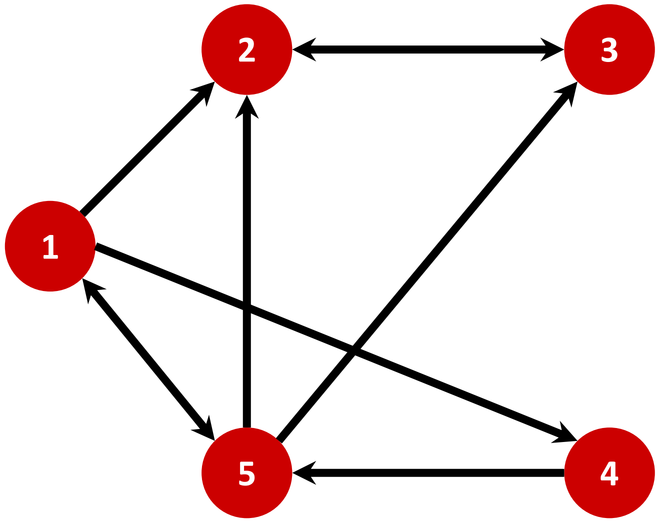
Università Roma Tre – Dipartimento di Matematica e Fisica
IN440 – Ottimizzazione Combinatoria
Prof. Marco Liverani

Introduzione alla teoria dei grafi



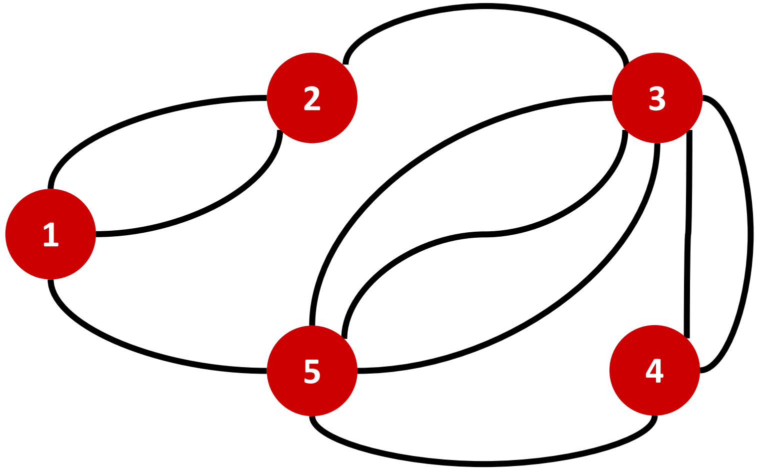
Grafi: definizioni principali

- Un grafo G è un oggetto matematico definito come una **coppia ordinata** di insiemi $G = (V, E)$, dove $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è l'insieme dei ***vertici*** (o *nodi*, o *punti*) ed E è l'insieme degli ***spigoli*** (o *archi*, o *lati*)
  - E è una relazione binaria su V, ovvero un sottoinsieme del prodotto cartesiano $V \times V$: $e = (v_i, v_j) \in E \subseteq V \times V$
- Se il grafo G è ***non orientato*** la relazione E è simmetrica: $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in E$
- Se il grafo G è ***orientato*** $(v_i, v_j) \in E$ non implica necessariamente che $(v_j, v_i) \in E$
- Sia $G = (V, E)$. Notazione:
  - Numero di vertici: $|V| = \boldsymbol{n}$
  - Numero di spigoli: $|E| = \boldsymbol{m}$
- Esempio:
  - $G = (V, E)$ è un grafo *orientato*
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow |V| = n = 5$
  - $E = \{(1,2), (1,4), (1,5), (2,3), (3,2), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3)\} \Rightarrow |E| = m = 9$

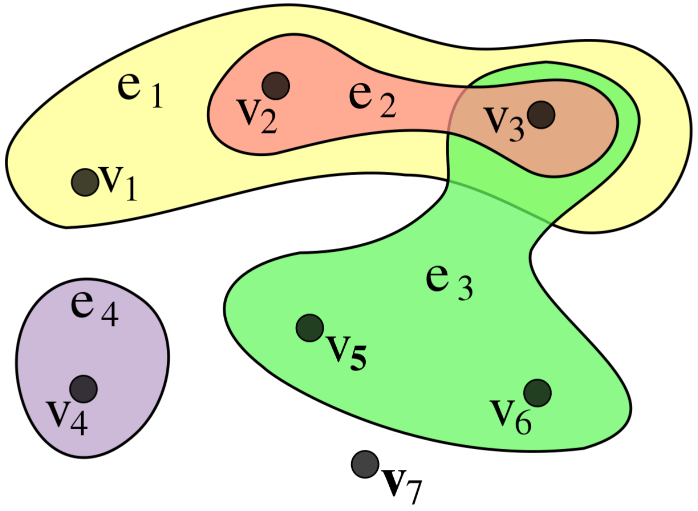


Ipergrafi e multigrafi

- Un **multigrafo** è un grafo in cui è possibile che una stessa coppia di vertici sia collegata da più spigoli



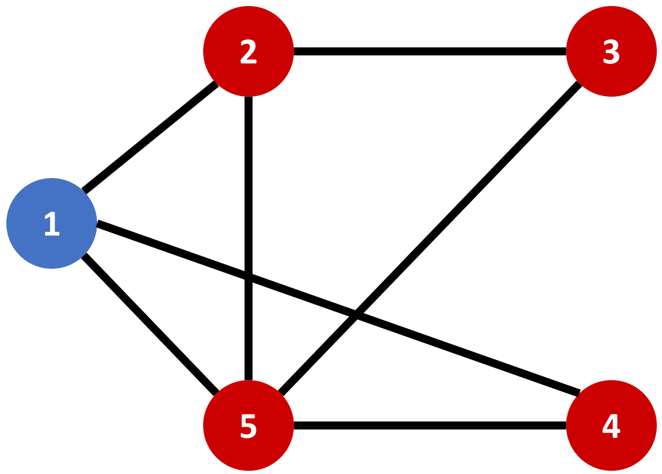
- Un **ipergrafo** è un grafo in cui uno spigolo può connettere uno o più vertici (anche più di due). In un ipergrafo $G = (V, E)$, $E \subseteq \mathcal{P}(V)$



Adiacenza e grado dei vertici

- Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato; se $(u, v) \in E$ allora si dice che lo spigolo è ***incidente*** i vertici u e v; lo spigolo è ***uscente*** dal vertice u ed ***entrante*** nel vertice v
- Il ***grado*** di un vertice è dato dal numero di spigoli incidenti su di esso (si possono definire anche il *grado entrante* e il *grado uscente* di un vertice in un grafo orientato); si indica con $d(v)$
- Se $(u, v) \in E$ allora v è ***adiacente*** ad u (se il grafo è orientato allora non è detto che u sia adiacente a v)
- Se $v \in V(G)$ allora $N(v) = \{u \in V(G)$ tali che $(v, u) \in E(G)\}$; $N[v] = N(v) \cup \{v\}$; $d(v) = |N(v)|$

Esempio: $N(1) = \{2, 4, 5\}, N[1] = \{1, 2, 4, 5\}$
$d(1) = 3$

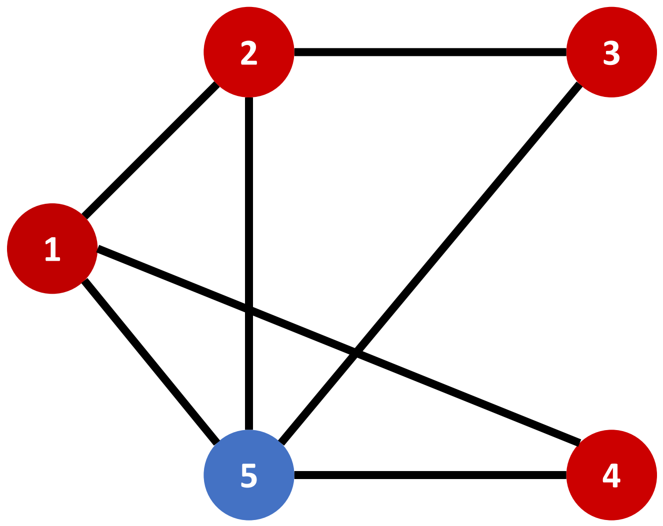


- $\delta(G)$ è il ***grado minimo*** dei vertici del grafo G
- $\Delta(G)$ è il ***grado massimo*** dei vertici del grafo G
- Se $\Delta(G) = \delta(G) = k$ allora il grafo G si dice ***k-regolare***

- **Proposizione**: Ogni grafo G possiede un numero pari di vertici di grado dispari (dim. per induzione)

Adiacenza tra vertici

- Se $N[v] \subseteq N[u]$ allora si dice che il vertice u ***domina*** v; se $N[v] = V(G)$ allora v è un ***vertice universale***; un grafo $G = (V, E)$ è un ***cono*** se contiene un solo vertice universale
  - Esempio: $N[3] \subset N[1]$, il vertice 1 *domina* il vertice 3
    Il vertice 5 è *universale*; il grafo è un *cono*



- Sia $S \subset V(G)$, $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$
- Se $N[S] = V(G)$ (tutti i vertici sono in S o sono adiacenti a vertici di S) allora S è un ***insieme dominante***; S è una ***copertura di vertici*** per G (tutti gli spigoli di G hanno almeno un estremo in S): stabilire se un grafo G ha una copertura di vertici di cardinalità al più k è un problema NP-completo (VERTEX COVER)

- Il ***grafo nullo*** con k vertici è il grafo con k vertici e nessuno spigolo; si indica con N_k
- Il ***grafo completo*** con n vertici è il grafo in cui tutti i vertici sono adiacenti a coppie; si indica con K_n

Cammini

- Un *cammino* di lunghezza k da un vertice u ad un vertice u' in G è una sequenza $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ di vertici tali che $u=v_0$, $u'=v_k$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$, per $i = 1, \ldots, k$
- Se esiste un cammino p da u a u', allora si dice che u' è ***raggiungibile*** da u
- Un cammino è ***semplice*** se tutti i suoi vertici sono distinti; la ***lunghezza*** di un cammino è data dal numero di spigoli di cui è composto
- La ***distanza*** $d_G(u, v)$ tra due vertici $u, v \in V(G)$ è data dalla lunghezza del cammino più breve che collega u a v

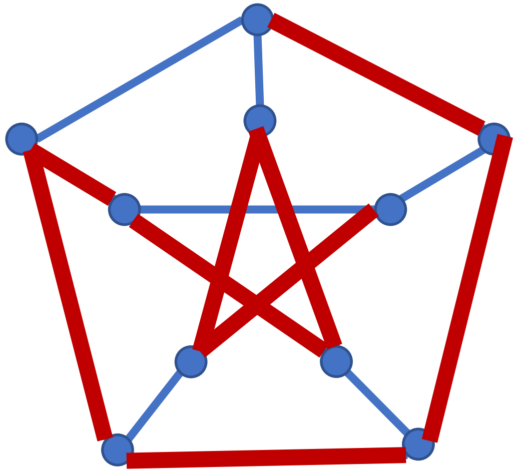
- Un cammino da u a u' è un ***ciclo*** se $u = u'$; se il ciclo è di lunghezza 1 allora è un ***cappio***
- Un grafo G privo di cicli è ***aciclico***; un grafo composto da un solo ciclo con n vertici si indica con C_n

- Un grafo **non** orientato è ***connesso*** se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino in G
- Le ***componenti connesse*** di un grafo sono le classi di equivalenza dei vertici sotto la relazione «raggiungibile da»
- Un grafo *orientato* è ***fortemente connesso*** se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino; le ***componenti fortemente connesse*** di un grafo sono le classi di equivalenza dei vertici sotto la relazione «mutuamente raggiungibile»

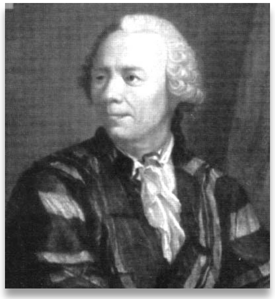
Grafi Hamiltoniani

William R. Hamilton
(1805 – 1865)

- Un *cammino hamiltoniano* è un cammino semplice che passa una ed una sola volta per ogni vertice del grafo
- Se il cammino hamiltoniano si chiude sul vertice da cui era partito, allora si ha un *ciclo hamiltoniano*
- Un grafo è *hamiltoniano* se possiede almeno un cammino o un ciclo hamiltoniano
- Il calcolo di un ciclo o di un cammino hamiltoniano è un problema NP-completo (HAM-CYCLE): bisogna provare tutte le permutazioni dei vertici di G (lo si dimostra per riduzione da VERTEX-COVER)
- **Teorema di Dirac**: Sia G un grafo con $n > 2$ vertici. Se $d(v) \geq n/2$ per ogni v allora G è hamiltoniano
- La condizione è solo sufficiente, ma non necessaria. Un controesempio banale è C_6, dove ogni vertice ha grado 2, ma il grafo è ugualmente hamiltoniano
    - Esempio: il *grafo di Petersen* possiede un cammino hamiltoniano, ma non un ciclo hamiltoniano

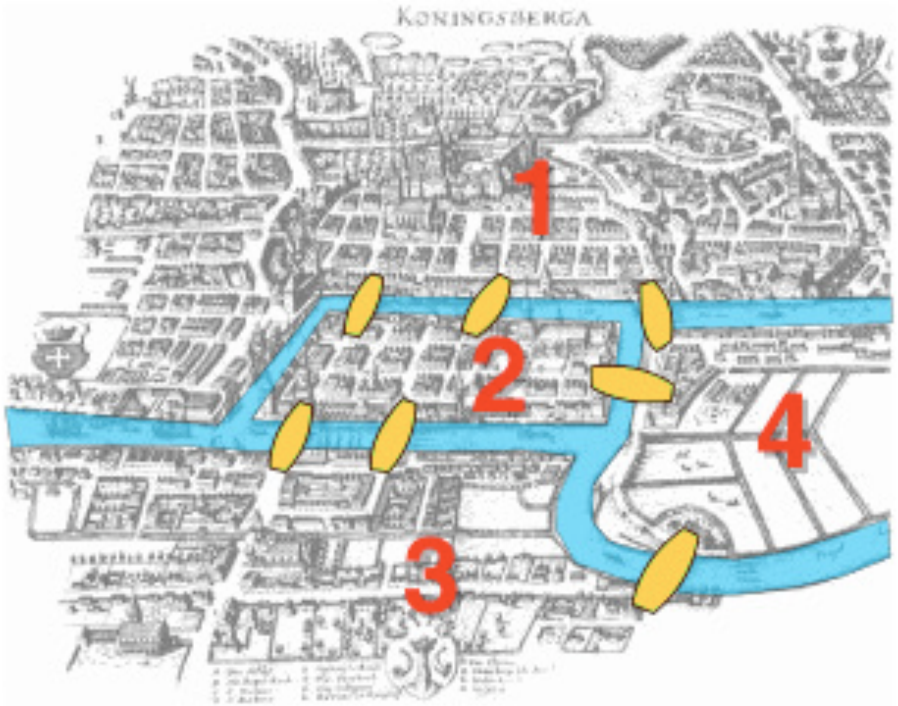


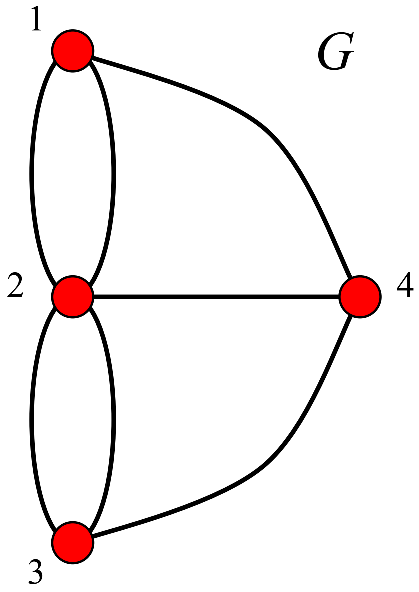
Grafi Euleriani

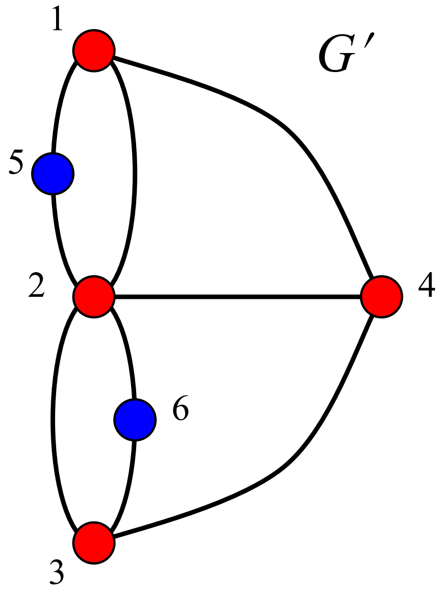


Leonhard Euler
(1707 – 1783)

- Nel **1736** Eulero ha risolto il **problema dei ponti della città di Königsberg**: la città era (è tutt'ora) attraversata dal fiume Pregel, che definisce due isole; le diverse zone della città erano collegate da **sette ponti**; ci si chiedeva se fosse possibile trovare un percorso nella città con cui attraversare tutti i ponti una ed una sola volta e poi tornare al punto di partenza
- Eulero affrontò il problema in termini topologici e dimostrò che **un simile percorso non esisteva**, dando origine alla moderna teoria dei grafi

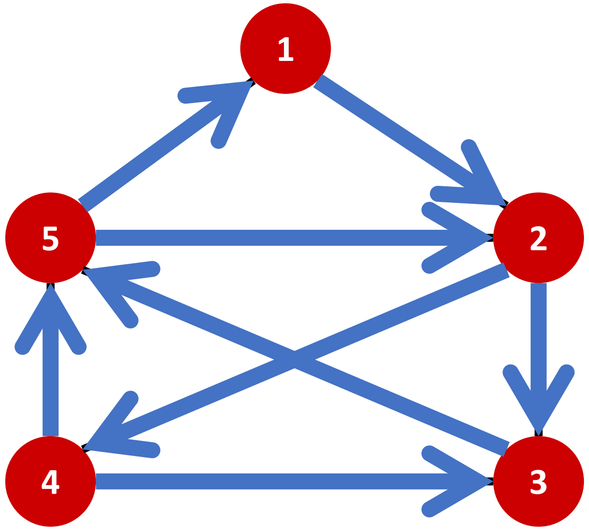


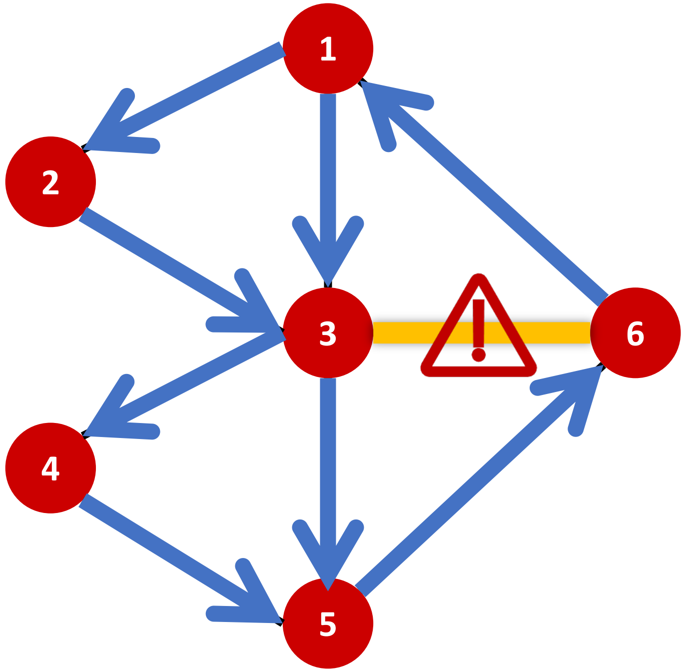




Grafi Euleriani

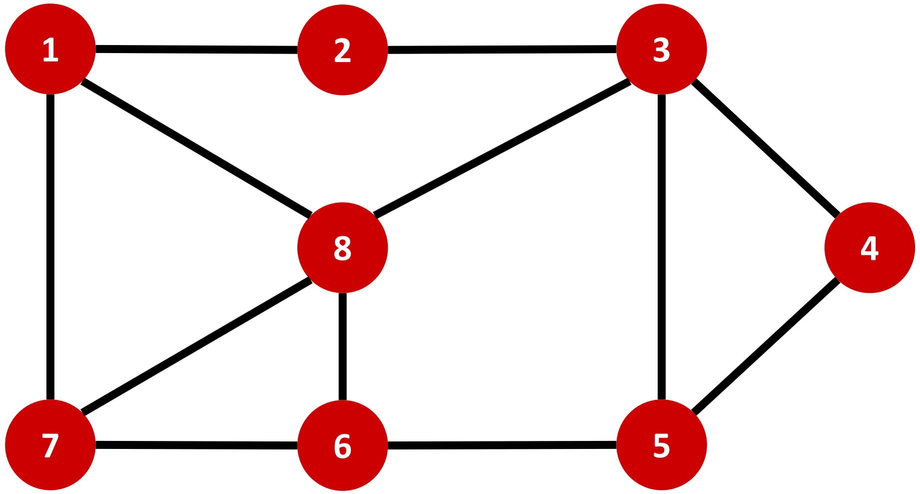
- Un **cammino** o un **ciclo euleriano** è un cammino o un ciclo (anche non semplice) che passa una volta sola per tutti gli **spigoli** del grafo
- Un grafo che ammette un ciclo euleriano si chiama **grafo euleriano**
- **Teorema di Eulero**: Per ogni grafo $G = (V, E)$ non orientato e connesso si ha:
  1. esiste un cammino euleriano in G se e solo se al massimo due vertici di G hanno grado dispari
  2. esiste un ciclo euleriano in G se e solo se tutti i vertici di G hanno grado pari





Punti di articolazione, ponti e centro di un grafo

- Un *punto di articolazione* di un grafo G connesso è un vertice v di G tale che, se si elimina v il grafo G non è più connesso
- Una ***componente biconnessa*** di un grafo è una componente priva di punti di articolazione
- Un *ponte* di un grafo connesso G è uno spigolo (u, v) di G tale che, se si elimina (u, v) il grafo G non è più connesso
- Il *diametro* di un grafo G è la massima distanza tra due vertici di G: $diam(G) = \max_{u,v \in V(G)} \min_{p:u \rightsquigarrow v} |p|$
- Il *centro* di un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di vertici $C(G) \subseteq V$, tale che la distanza di ogni vertice $v \in C(G)$ da ogni altro vertice di V sia minima; il raggio di G è dato da $r(G) = \min_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$

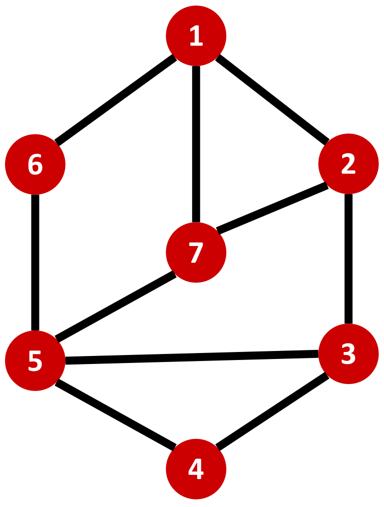


$\text{diam}(G) = 3$

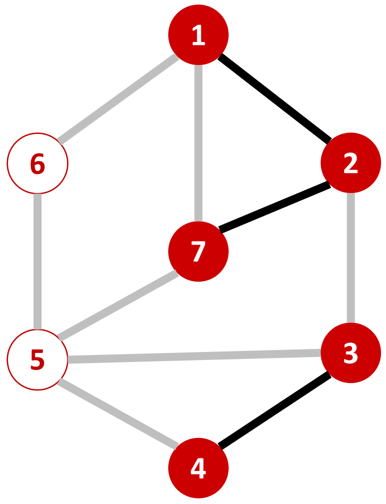
$C(G) = \{8\}$

Sottografi

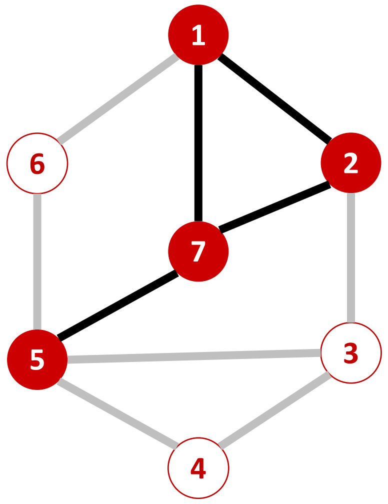
- Un grafo $G' = (V', E')$ è un ***sottografo*** di $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
- Dato un insieme $V' \subseteq V$, il sottografo di $G = (V, E)$ ***indotto*** da V' è il grafo $G' = (V', E')$ dove $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$
- Un grafo ***completo*** K_n è un grafo $G = (V, E)$ non orientato con n vertici, in cui ogni coppia di vertici è adiacente (è collegata da uno spigolo)
- Una ***clique*** di un grafo $G = (V, E)$ è un sottografo completo massimale



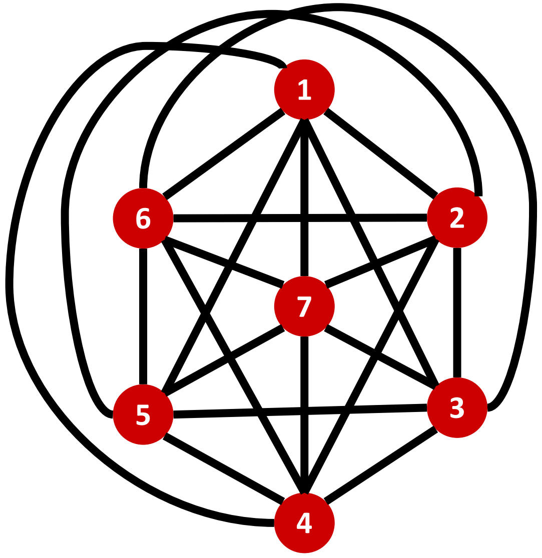
$G = (V, E)$



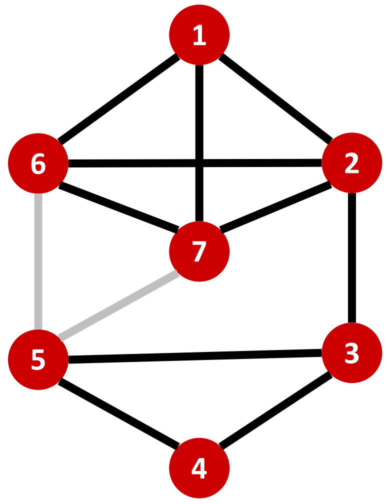
Sottografo di G



Sottografo indotto di G



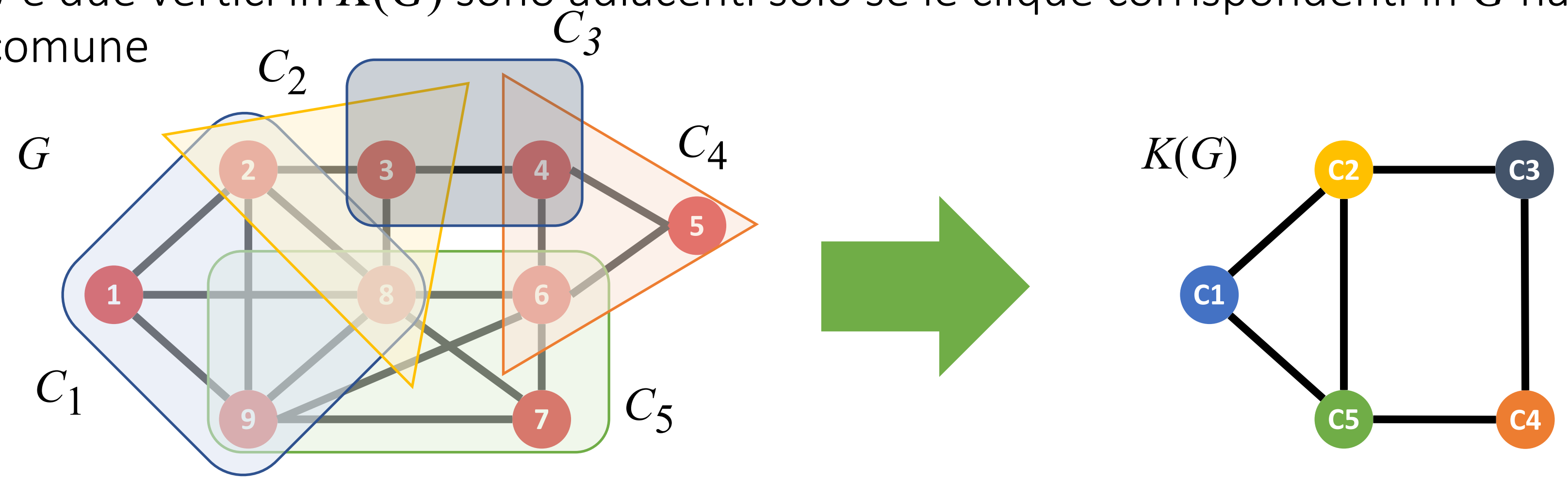
Grafo completo K_7



Due clique di $G = (V, E)$

Grafi clique-iterati

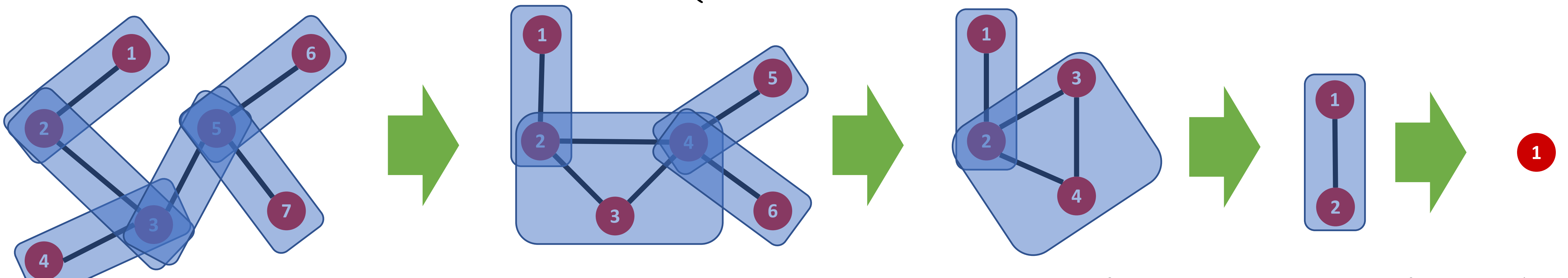
- Dato un grafo $G = (V, E)$, il grafo $K(G)$ delle clique di G è un grafo i cui vertici corrispondono alle clique del grafo G e due vertici in $K(G)$ sono adiacenti solo se le clique corrispondenti in G hanno almeno un vertice in comune



- Identificare le clique di un grafo è un problema estremamente complesso: Il problema CLIQUE rientra nell'insieme dei problemi NP completi
- Un interessante tema di ricerca è lo studio del comportamento di un grafo sottoposto all'azione dell'operatore clique iterato più volte: il numero di vertici diminuisce fino a ridursi ad un solo vertice (grafo K-*convergente*), cresce fino all'infinito (grafo K-*divergente*) o rimane stabile su un valore finito (grafo K-*stabile*)?
- Si può studiare il $\lim_{p \to \infty} |K^p(G)|$ dove con $K^p(G)$ si è indicato il grafo $K(K(\ldots K(G)))$

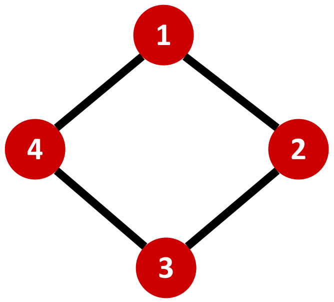
Grafi clique-iterati

- Si può studiare il $\lim_{p\to\infty} |K^p(G)|$ dove $K^p(G) = \begin{cases} G & \text{per } p = 0 \\ K(K^{p-1}(G)) & \text{per } p > 0 \end{cases}$

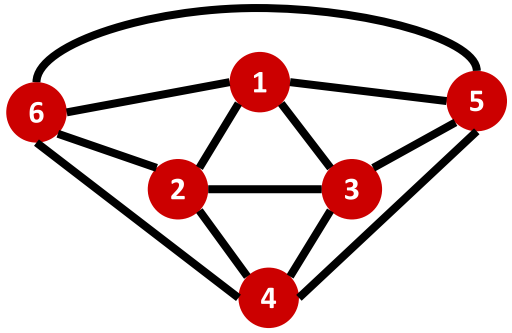


G $\quad$ $K(G)$ $\quad$ $K(K(G)) = K^2(G)$ $\quad$ $K(K(K(G))) = K^3(G)$ $\quad$ $K^4(G)$

G è K-*convergente* (in questo caso è K-*nullo*)



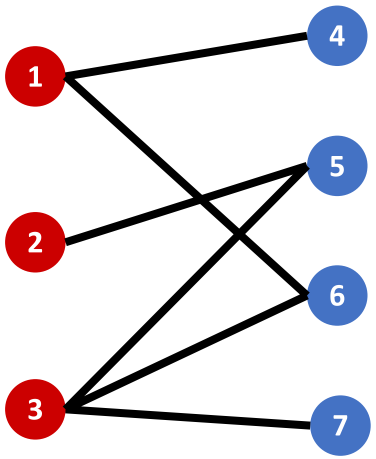
Il grafo C_k è self-clique per $k > 3$



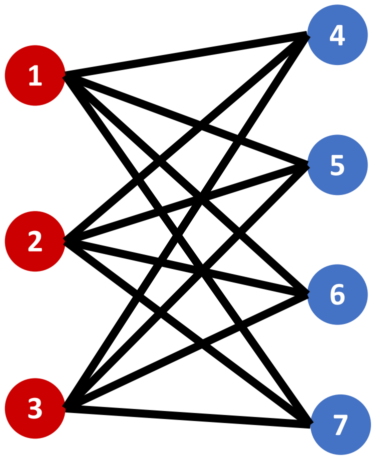
Il grafo $\mathcal{O}_n$ ottaedro n-dimensionale è K-*divergente* per $n \geq 3$

Grafi multipartiti

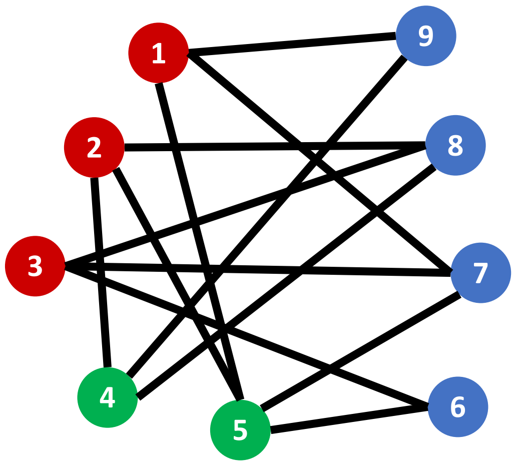
- In un grafo $G = (V, E)$ un insieme di vertici $V' \subseteq V$ è un ***insieme indipendente*** se i vertici di V' sono tutti non adiacenti a coppie
- Un grafo ***bipartito*** è un grafo non orientato $G = (V, E)$ dove V può essere partizionato in due insiemi V_1 e V_2 tali che $(u, v) \in E \Rightarrow u \in V_1$ e $v \in V_2$, oppure $u \in V_2$ e $v \in V_1$ (V_1 e V_2 sono due insiemi indipendenti)
- Se tutti i vertici di V_1 sono adiacenti a tutti i vertici di V_2 il grafo si dice ***bipartito completo*** e si indica con $K_{p,q}$ se $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$
- Sia $G = (V, E)$ un grafo; se esiste una partizione di V in p insiemi indipendenti $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$, allora G è un grafo ***multipartito***; se tutti i vertici di V_i sono adiacenti a tutti i vertici di V_j per ogni $i \neq j$ allora G è un grafo ***multipartito completo*** e si indica con $K_{h_1, h_2, \ldots, h_p}$ con $h_i = |V_i|$



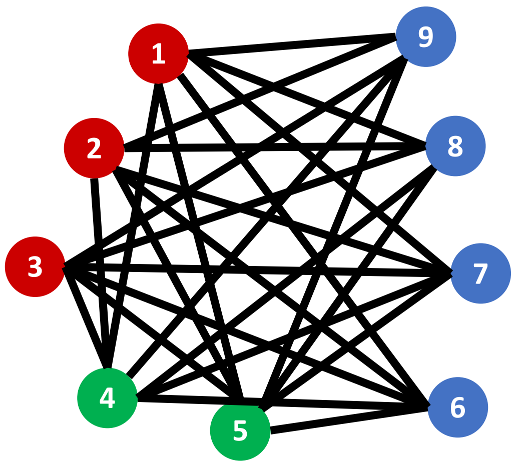
Grafo bipartito



Grafo bipartito completo



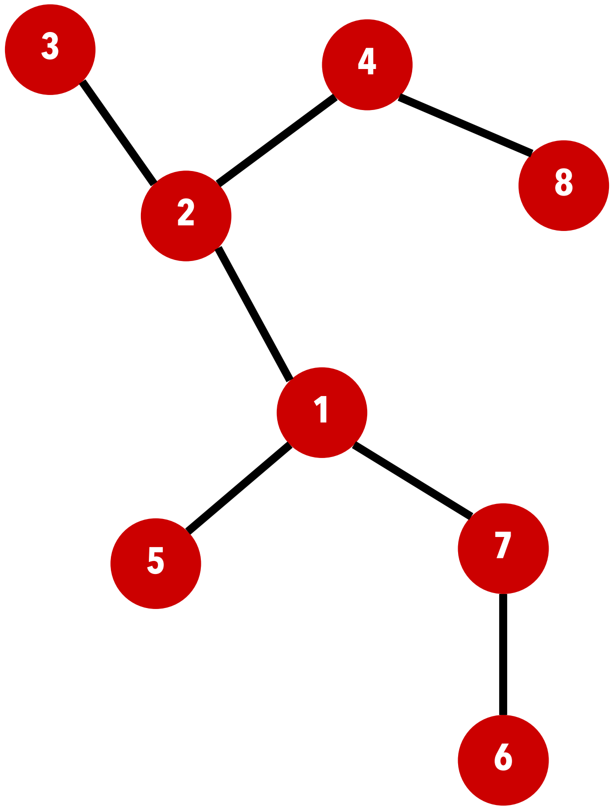
Grafo multipartito



Grafo multipartito completo

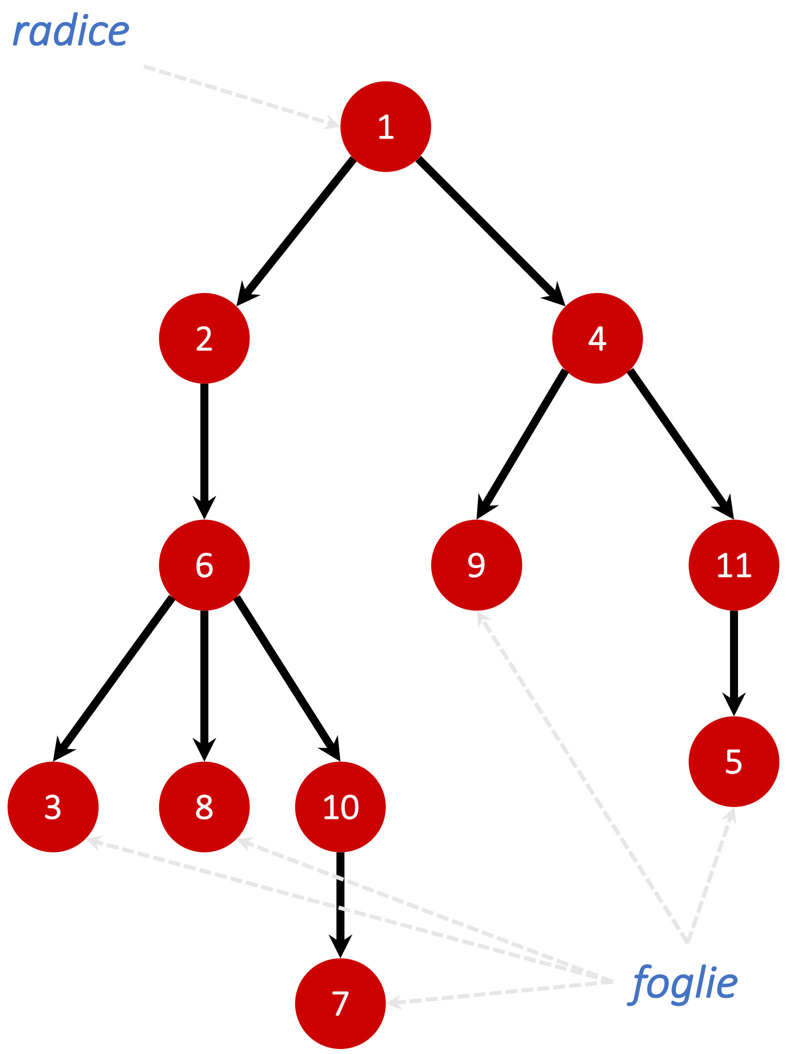
Alberi

- Un grafo $G = (V, E)$ *connesso* e *aciclico* è un ***albero***
- Gli alberi godono di numerose proprietà:
  - il cammino semplice fra due vertici è unico (ed è il cammino di lunghezza minima)
  - $|V| = |E| + 1$: il numero di vertici di un albero è sempre pari al numero di spigoli più uno
  - il grafo è aciclico, ma se aggiungiamo anche un solo spigolo, si crea un ciclo
  - il grafo è connesso, ma se rimuoviamo anche un solo spigolo, si sconnette in due componenti



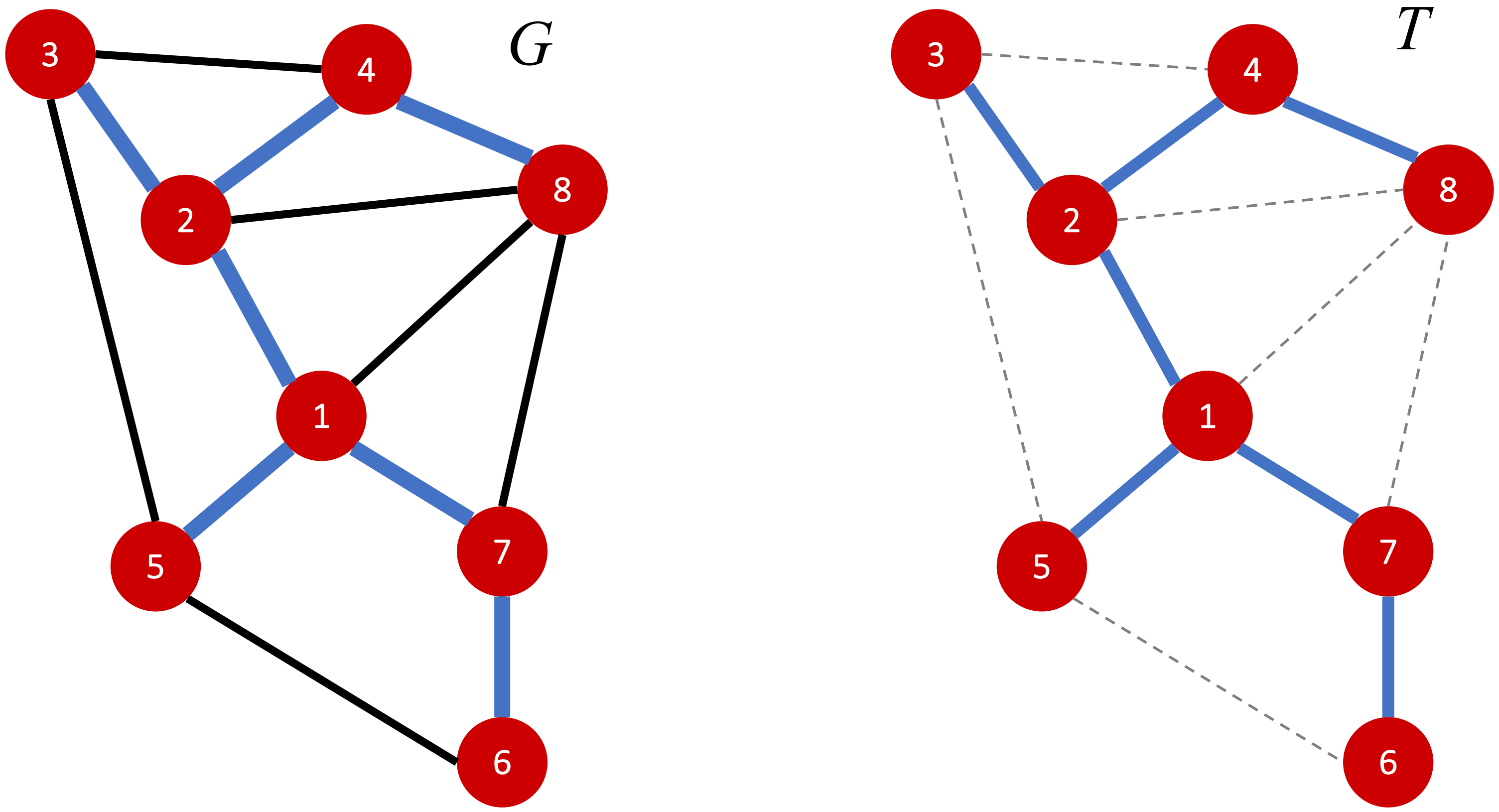
Alberi radicati

- Un ***albero radicato*** è un albero orientato in cui uno dei vertici, detto ***radice***, ha grado entrante nullo
- Se u è un vertice dell'albero radicato T ed r è la sua radice, allora ogni vertice v sull'unico cammino da r a u è un *antenato* di u e u è un *discendente* di v
- Se (u, v) è uno spigolo di un albero radicato, allora si dice che u è il ***padre*** di v e che v è un ***figlio*** di u; se anche (u, w) è uno spigolo dell'albero, allora v e w sono *cugini*
- Un vertice senza figli è una ***foglia*** dell'albero
- La lunghezza del cammino più lungo dalla radice ad una foglia è l'***altezza dell'albero***



Alberi ricoprenti

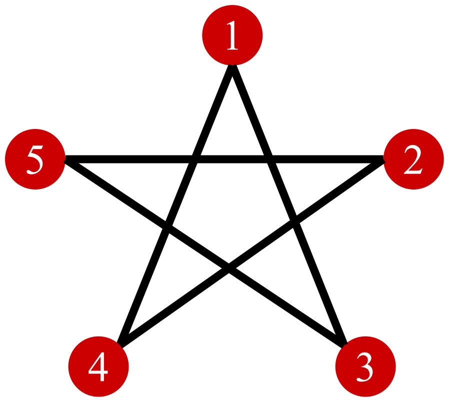
- Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Sia $T = (V, E')$ un sottografo connesso di G; se T è un albero allora si dice che T è un ***albero ricoprente*** (***spanning tree***) di G
- Un grafo G può avere anche più di un albero ricoprente
- Se G non è connesso allora l'insieme degli alberi che ricoprono le sue componenti connesse è una ***foresta ricoprente*** (***spanning forest***)



Grafo $G = (V, E)$ e un albero ricoprente $T = (V, E')$ con $E' \subset E$

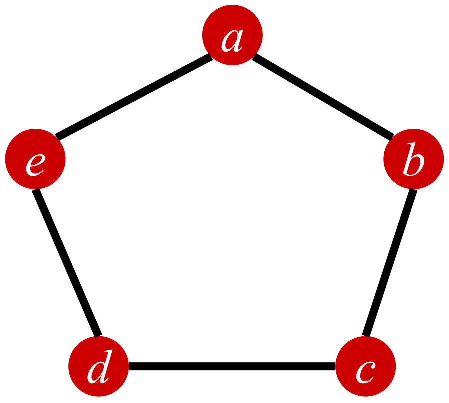
Isomorfismi tra grafi

- Due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ sono ***isomorfi*** se esiste una corrispondenza biunivoca (*isomorfismo*) $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ tale che $(u,v) \in E(G_1) \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G_2)$
- Grafi isomorfi sono grafi il cui disegno può coincidere, a meno della numerazione dei vertici



G

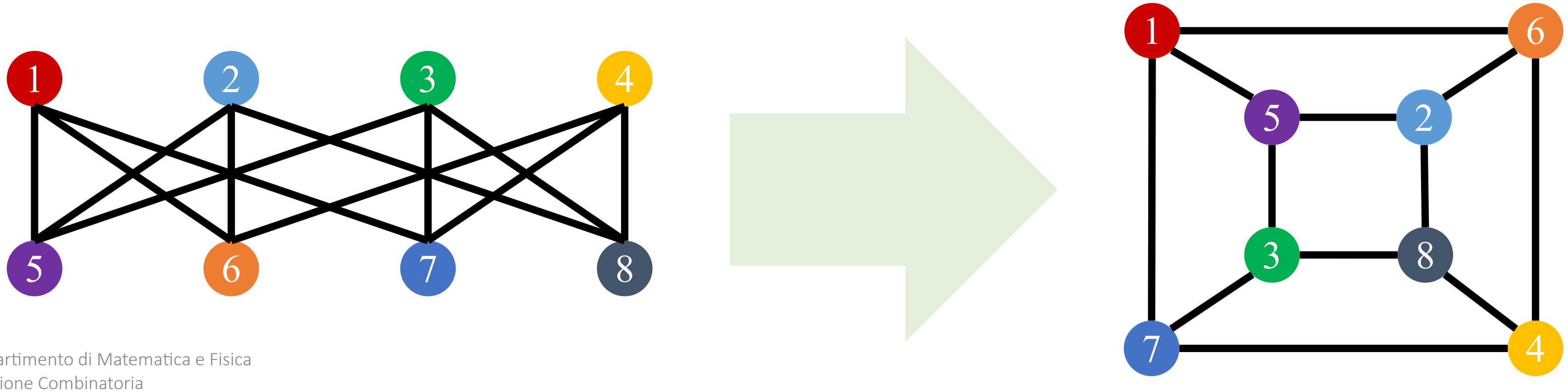
$$\varphi(1) = a$$
$$\varphi(2) = d$$
$$\varphi(3) = b$$
$$\varphi(4) = e$$
$$\varphi(5) = c$$



$G' = \varphi(G)$

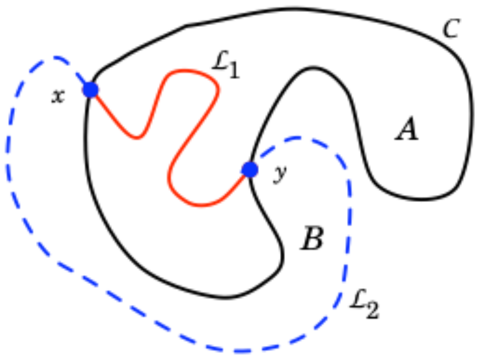
Isomorfismi tra grafi

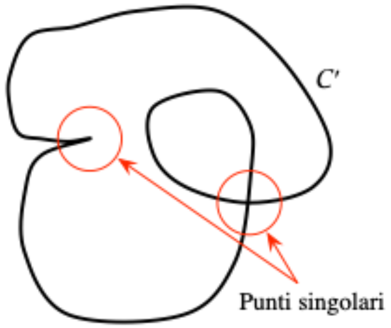
- Proprietà invarianti per isomorfismi:
  - numero dei vertici e numero degli spigoli
  - grado dei vertici (la distribuzione del grado dei vertici)
  - il numero di componenti connesse del grafo, il numero di clique
- Queste proprietà invarianti possono essere usate come «condizioni necessarie» (ma non sufficienti) per verificare l'esistenza di un isomorfismo tra due grafi
- GRAPH ISOMORPHISM: dati due grafi G_1 e G_2 stabilire se sono isomorfi; è un problema NP, ma non si sa se sia NP-completo o P
- È interessante notare che il problema dell'isomorfismo su sottografi (SUBGRAPH ISOMORPHISM PROBLEM: dati G_1 e G_2, esiste un isomorfismo tra G_1 e un sottografo di G_2?) è NP-completo



Grafi planari

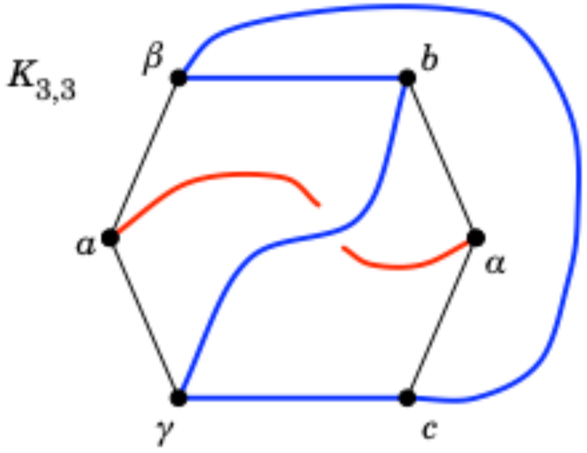
- Un grafo è ***planare*** se è isomorfo ad un grafo che può essere disegnato sul piano senza intersecare gli spigoli
  - Dal punto di vista applicativo è utile sapere se un grafo è planare: visualizzazione di grafi, progettazione di circuiti elettronici, ...
- Vogliamo dimostrare alcune proprietà utili a identificare i grafi planari
- Per provare le proprietà seguenti si fa uso del concetto di **curva chiusa semplice** su $\mathbb{R}^2$ e del seguente teorema (apparentemente ovvio, ma molto difficile da dimostrare):
  - **Teorema della curva di Jordan**: se $\mathcal{C}$ è una curva chiusa semplice nel piano allora $\mathcal{C}$ divide il piano in due regioni distinte A e B che hanno $\mathcal{C}$ come frontiera comune; se $x \in A$ e $y \in B$ allora ogni curva continua che passa per x e per y interseca $\mathcal{C}$
  - **Corollario**: Siano x e y due punti distinti di una curva chiusa semplice $\mathcal{C}$ sul piano $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{L}$ una curva continua nel piano $\mathbb{R}^2$ che unisce i due punti x e y, priva di ulteriori punti in comune con $\mathcal{C}$. Allora $\mathcal{L}$ è interamente contenuta all'interno di una delle due regioni definite da $\mathcal{C}$

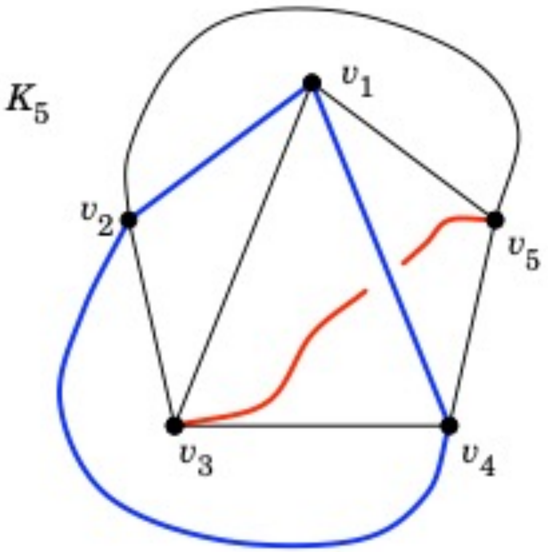




Grafi planari

- **Teorema**: $K_{3,3}$ non è planare
- **Teorema**: K_5 non è planare



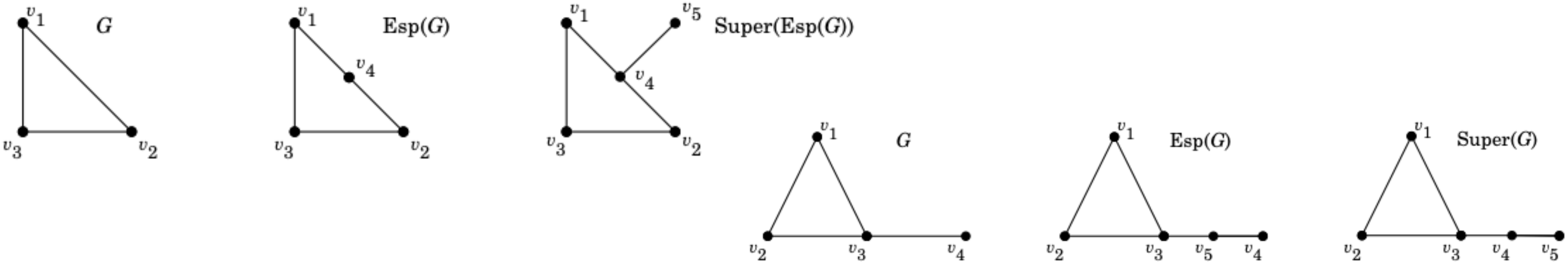


- **Teorema**: Ogni sottografo di un grafo planare è planare
- H è un **supergrafo** di G se G è un sottografo di H
- **Corollario**: Ogni supergrafo H di un grafo G non planare non è planare.

  Dimostrazione. Sia H planare. Allora il suo sottografo G deve essere planare per il Teorema precedente. Ma G non è planare per ipotesi, quindi anche H non può essere planare ■

Grafi planari

- Dato G, un'***espansione*** di G è il grafo G' ottenuto da G aggiungendo uno o più vertici di grado 2 sugli spigoli di G: se $(u,v) \in E(G)$ si ottiene un'espansione di G sostituendo (u, v) con (u, w) e (w, v) con $w \notin V(G)$
  - NOTA: in generale un'espansione di G non è un supergrafo di G e viceversa (un'espansione di G può però essere isomorfa a un supergrafo di G)



- **Teorema**: Ogni espansione di K_5 e $K_{3,3}$ è non planare

  Dimostrazione. Procediamo per assurdo: sia H planare; eliminiamo tutti i vertici aggiunti su G per ottenere H e sostituiamoli con uno spigolo; il disegno dovrebbe essere planare, e invece abbiamo ottenuto K_5 o $K_{3,3}$ che non sono planari ∎

- **Corollario**: Ogni supergrafo di un'espansione di K_5 o $K_{3,3}$ è non planare

  Dimostrazione. Si arriva alla tesi direttamente dal Teorema: ogni supergrafo di un grafo non planare è non planare ∎

Grafi planari

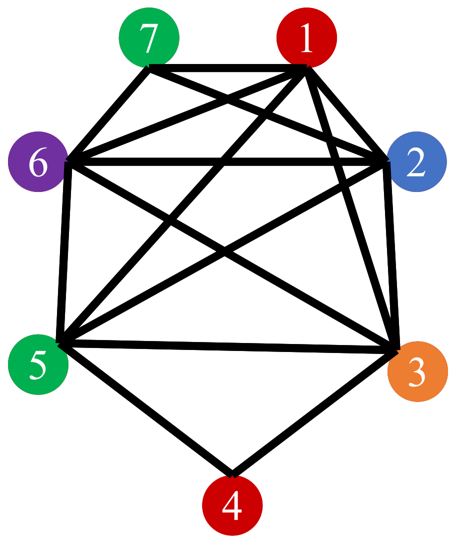
- **Teorema di Kuratowski**: Ogni grafo non planare è un supergrafo di un'espansione di K_5 o $K_{3,3}$

  NOTA:
  - ogni espansione di un supergrafo è anche il supergrafo di un'espansione
  - esistono supergrafi di espansioni che non sono espansioni di supergrafi
  - $\{$espansioni di supergrafi$\} \subset \{$supergrafi di espansioni$\}$

Colorazione di grafi

- Una ***colorazione dei vertici*** di un grafo $G = (V, E)$ può essere costruita assegnando un colore ad ogni vertice del grafo in modo tale che non esistano due vertici adiacenti con lo stesso colore (i colori possono essere ripetuti)

  Nota: dal punto di vista combinatorio il problema della colorazione di un grafo è molto simile al problema della costruzione di un quadrato latino di ordine n

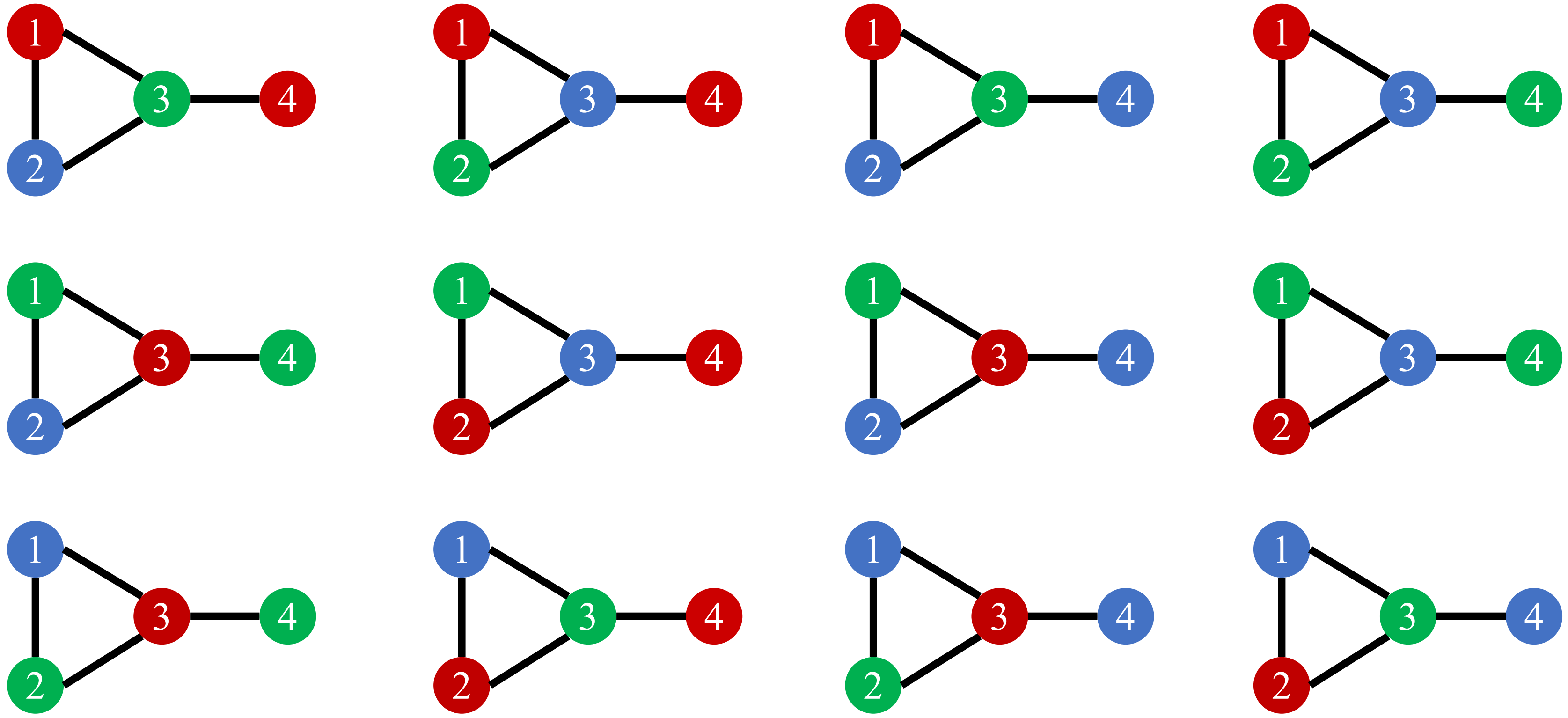


- *Problema di ottimizzazione*: trovare una colorazione del grafo utilizzando il *minimo* numero di colori
- Il minimo numero di colori con cui può essere colorato un grafo G si chiama ***numero cromatico*** e si indica con $\chi(G)$

  Nota: assegnare una colorazione minima ai vertici di un grafo significa creare una partizione dei vertici in k insiemi indipendenti: un grafo è k-partito se e solo se è k-colorabile
- Indichiamo con $\chi_t(G)$ il numero di diverse colorazioni del grafo G con t colori. Quindi $\chi(G) = \min t$ tale che $\chi_t(G) \neq 0$

Colorazione di grafi

- In quanti modi differenti può essere colorato un grafo G?



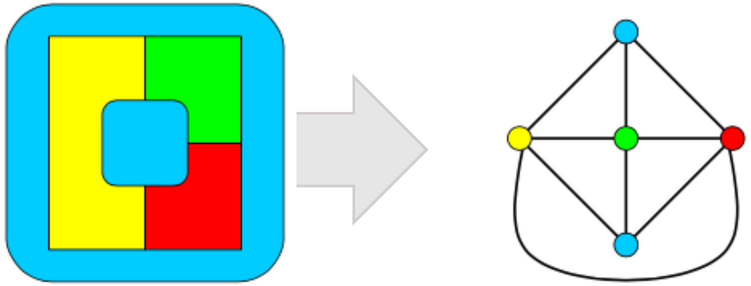
12 colorazioni diverse con $t = 3$ colori

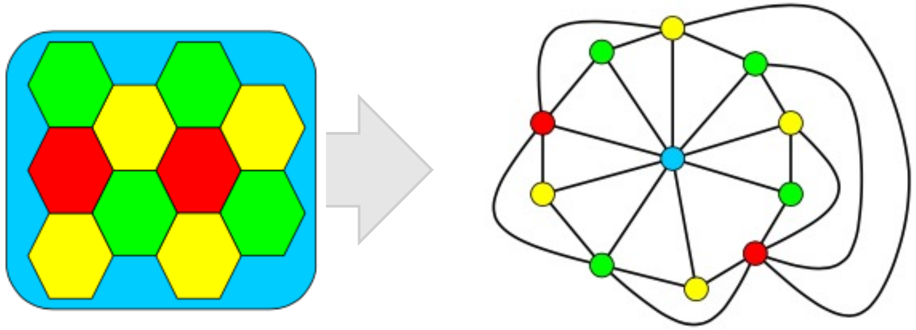
nessuna colorazione possibile con $t = 1$ e $t = 2$ colori

- Il **polinomio cromatico** di un grafo $P_G(t)$ è una funzione che conta il numero di possibili colorazioni differenti di G utilizzando t colori: è un polinomio che interpola i punti $(t, \chi_t(G))$
  - $\chi(G)$ è il più piccolo intero positivo che non sia uno zero di $P_G(t)$

Colorazione di grafi

- **Qual è il minimo numero di colori per colorare un grafo planare?** È un problema che risale al passato perché equivale a colorare una «carta geografica politica»: i vertici sono i Paesi e due vertici sono adiacenti se i Paesi sono confinanti



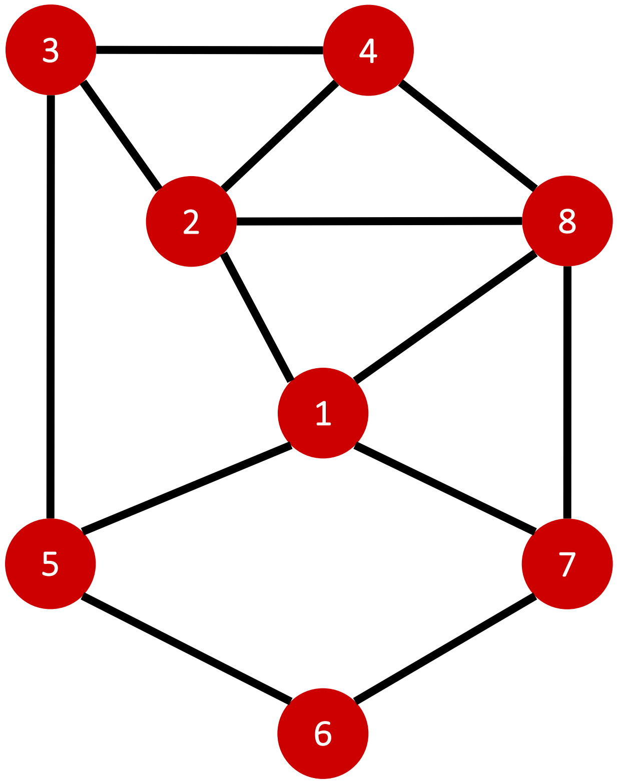


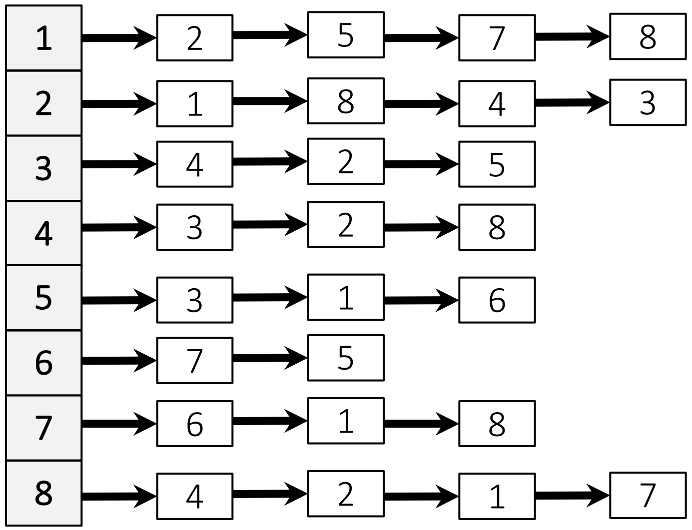
- A lungo si è capito che 4 colori erano sufficienti, ma nessuno era riuscito a dimostrarlo formalmente
- Nel 1977 Haken e Appel dimostrarono che il numero di combinazioni con cui è possibile costruire frammenti essenziali di una carta geografica è finito e, facendo uso di un algoritmo e di un computer, le generarono tutte mostrando che quattro colori erano sufficienti ad ottenere una buona colorazione in tutti i casi
- Questo risultato è noto come **Teorema dei Quattro colori**

Rappresentazione di grafi

- Nella memoria della macchina un grafo può essere rappresentato mediante:
  - ***Liste di adiacenza***: per ogni vertice $u \in V$ viene costruita una lista dei veritici $v_1, \ldots, v_k$ adiacenti a u, ossia tali che $(u,v_i) \in E$ per ogni $i = 1, \ldots, k$
  - ***Matrice di adiacenza***: il grafo viene rappresentato con una matrice quadrata di ordine $n = |V|$, in cui $M_{i,j} = 1$ se $(v_i,v_j) \in E$, e $M_{i,j} = 0$ altrimenti
- Per grafi *sparsi* (con pochi spigoli rispetto al numero dei vertici) è conveniente la rappresentazione mediante liste di adiacenza

Rappresentazione di grafi





In questo esempio il grafo **non è orientato**, quindi la matrice di adiacenza è **simmetrica** rispetto alla diagonale principale

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	1	0	1	1
2	1	0	1	1	0	0	0	1
3	0	1	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0
7	1	0	0	0	0	1	0	1
8	1	1	0	1	0	0	1	0

Riferimenti bibliografici

- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, «*Introduzione agli algoritmi e strutture dati*», terza edizione, McGraw-Hill (Appendice B.4 e B.5)
- Reinhard Diestel, «*Graph Theory*», Springer, 2000
- Alan Gibbons, «*Algorithmic Graph Theory*», Cambridge University Press, 1985
- Frank Harary, «*Graph Theory*», ABP, 1969
- Richard J. Trudeau, «*Introduction to Graph Theory*», Dover Publications, 1993
- Marco Liverani, *Dispense del Corso di Ottimizzazione Combinatoria: Elementi di teoria dei grafi* (http://www.mat.uniroma3.it/users/liverani/doc/disp_oc_04.pdf)