Università degli Studi di Roma TreCorso di laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2007/2008
Docente: Prof.ssa E.Scoppola - Tutrice: Dott.ssa Katia Colaneri

Tutorato n.2 del 07/03/2008 - Soluzioni

Esercizio 1

1.

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,y)}(x)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{(x,+\infty)}(y)$$

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)dy = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$$f_{Y|X}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{(x,+\infty)}(y)}{\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)} = \lambda e^{-\lambda(y-x)}\mathbf{1}_{(x,+\infty)}(y)$$

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_x^{+\infty} y\lambda e^{-\lambda(y-x)}dy = x + \frac{1}{\lambda}$$

Quindi $\mathbb{E}(Y|X) = X - \frac{1}{\lambda}$

2.

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)}dy = e^{-x}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xe^{-x(y+1)}}{e^{-x}} = xe^{-xy}$$

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_0^{+\infty} yxe^{-xy}dy = \frac{1}{x}$$

Quindi $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{1}{X}$

Esercizio 2

$X \sim \mathbf{B}(n,p)$,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{tx}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x q^{n-x} = \left(pe^t + q\right)^n$$

Analogamente $Y \sim \mathbf{B}(m,p)$,

$$m_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{tY}\right) = \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} e^{ty}p^y q^{m-y} = \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} \left(pe^t\right)^y q^{m-y} = \left(pe^t + q\right)^m$$

Sia $Z = X + Y$: ne calcolo la funzione generatrice dei momenti

$$m_Z(t) = \mathbb{E}\left(e^{tZ}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right) = m_X(t)m_Y(t) =$$

$$= \left(pe^t + q\right)^n \left(pe^t + q\right)^m = \left(pe^t + q\right)^{n+m}$$

e questa è la funzione generatrice dei momenti di una $\mathbf{B}(n+m, p)$

Esercizio 3

1. Cacoliamo la funzione geneatrice dei momenti:

$$m_Y(y) = \mathbb{E}\left(e^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX^2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tx^2} 2xe^{-x^2} dx =$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{-2x(1-t)}{1-t} e^{-x^2(1-t)} dx = -\frac{1}{1-t}\left[-e^{-x^2(1-t)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-t}$$

   per $t < 1$ Questa è la funzione generatrice dei momenti di una variabile esponenziale di parametro 1.

2. Anche in questo caso procediamo calcolando la funzione generatrice dei momenti di Z:

$$m_Z(t) = \mathbb{E}\left(e^{tZ}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{tY_i}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tY_1}\right)^n = \left(\frac{1}{1-t}\right)^n$$

   Allora $Z \sim \Gamma(n, 1)$

Esercizio 4

Possiamo procedere in 2 modi

1. • Metodo della funzione di distribuzione

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X^2 \le z) = P(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) = 2P(0 \le X \le \sqrt{z}) =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z}$$

   Questa è la funzione di densità di una $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- Metodo della funzione generatrice dei momenti

$$m_Z(z) = \mathbb{E}\left(e^{tX^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-2t}}}{\frac{1}{\sqrt{1-2t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Quella che abbiamo trovato è la funzione generatrice dei momenti di una $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sim \chi_1^2$.

2.
$$m_{X_1^2+X_2^2}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X_1^2+X_2^2)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1^2}\right) \mathbb{E}\left(e^{tX_2^2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}$$

ed è la funzione generatrice dei momenti di una χ_2^2

3.
$$m_{X_1^2+\ldots+X_n^2}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)^{\frac{n}{2}}$$

che è la funzione generatrice dei momenti di una χ_n^2