Università degli Studi di Roma TreCorso di laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2007/2008
Docente: Prof.ssa E.Scoppola - Tutrice: Dott.ssa Katia Colaneri

Tutorato n.5 del 03/04/2008-Soluzioni

Esercizio 1

1. Stimiamo λ con il metodo dei momenti:

$$\mu_1 = M_1 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) = \bar{X}$$

da cui $\widehat{\lambda}_m = \bar{X}$.

Scriviamo la funzione di verosimiglianza:

$$L_1(x_1, ..., x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Passiamo al logaritmo:

$$logL_1(x_1, ..., x_n, \lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log\lambda + \log\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

e deriviamo rispetto a λ:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} logL_1(x_1, ..., x_n, \lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \bar{x}$$

Qiundi $\widehat{\lambda}_v = \bar{X}$

2. Osserviamo che $\widehat{\lambda}_m = \widehat{\lambda}_v$.

$$\mathbb{E}(\widehat{\lambda}_v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$$

Quindi gli stimatori sono corretti.

3. $$MSE(\widehat{\lambda}_v) = Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{n\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n}$$

Esercizio 2

1. Stimiamo θ con il metodo dei momenti:

$$\mu_1 = M_1 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\theta = \bar{X}$$

Da cui $\widehat{\theta}_m = \frac{4}{3}\bar{X}$.

Calcoliamo la funzione di massima verosimiglianza:

$$L(x_1, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3x_i^2}{\theta^3}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \left(\frac{3}{\theta^3}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i)$$

Chiamo:
$y_1 = min\{x_1, ..., x_n\}$
$y_n = max\{x_1, ..., x_n\}$.

$$L(x_1, ..., x_n, \theta) = \left(\frac{3}{\theta^3}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbf{1}_{(0,y_n)}(y_1)\mathbf{1}_{(y_n,+\infty)}(\theta)$$

La funzione è decrescente in θ, dunque il massimo si ha per $\theta = y_n$
Allora $\widehat{\theta}_v = Y_n$.

2.
$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}_m) = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = \frac{4}{3n}n\frac{3}{4}\theta = \theta$$

Quindi lo stimatore ottenuto con il metodo dei momenti è corretto.

Calcoliamo la distribuzione di Y_n:

$$P(Y_n \le y) = P(max\{X_1, ..., X_n\} \le y) = P(X_1 \le y, ..., X_n \le y) = [P(X_1 \le y)]^n =$$

$$= \left(\int_0^y \frac{3x^2}{\theta^3}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)dx\right)^n = \frac{y^{3n}}{\theta^{3n}}$$

$$f_{Y_n}(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^{3n}}{\theta^{3n}}\right] = \frac{3ny^{3n-1}}{\theta^{3n}}$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^\theta \frac{3ny^{3n}}{\theta^{3n}}dy = \frac{3n}{3n+1}\theta$$

Cioè $\widehat{\theta}_v$ è distorto.

3.
$$MSE(\widehat{\theta}_m) = Var\left(\frac{4}{3}\bar{X}\right) = \frac{1}{15n}\theta^2$$

$$MSE(\widehat{\theta}_v) = \mathbb{E}\left[(\theta - Y_n)^2\right] = \left[(Y_n - \mathbb{E}(Y_n))^2\right] + [\theta - \mathbb{E}(Y_n)]^2 = Var(Y_n) + [\theta - \mathbb{E}(Y_n)]^2$$

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \int_0^\theta \frac{3ny^{3n+1}}{\theta^{3n}} dy = \frac{3n}{3n+2}\theta^2$$

$$Var(Y_n) = \frac{3n}{3n+2}\theta^2 - \left(\frac{3n}{3n+1}\theta\right)^2 = \frac{3n}{(3n+1)^2(3n+2)}\theta^2$$

$$[\theta - \mathbb{E}(Y_n)] = \left[\theta - \frac{3n}{3n+1}\theta\right] = \frac{\theta}{3n+1}$$

$$MSE(Y_n) = \frac{3n}{(3n+1)^2(3n+2)}\theta^2 + \frac{\theta^2}{(3n+1)^2} = \frac{2\theta^2}{(3n+1)(3n+2)}$$

Esercizio 3

Scriviamo la funzione di verosimiglianza:

$$L_1(x_1, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{x_i}{\theta}}}{\theta} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x_i) = \frac{e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}}{\theta^n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x_i)$$

Passiamo al logaritmo:

$$logL_1(x_1, ..., x_n, \theta) = -n\log\theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}$$

e deriviamo rispetto a θ:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} logL_1(x_1, ..., x_n, \theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} = 0 \Leftrightarrow \theta = \bar{x}$$

Qiundi $\widehat{\theta}_v = \bar{X}$

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = \theta$$

Dunque lo stimatore è corretto.

$$MSE(\widehat{\theta}_m) = Var\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n}\theta^2$$

Esercizio 4

1. Scriviamo la funzione di verosimiglianza:

$$L_1(x_1, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x_i) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,1]}(x_i)$$

   Passiamo al logaritmo:

$$logL_1(x_1,...,x_n,\theta) = n\log\theta - (\theta-1)\log\prod_{i=1}^n x_i + \log\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,1]}(x_i)$$

e deriviamo rispetto a θ:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}logL_1(x_1,...,x_n,\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i}$$

Qiundi $\widehat{\theta}_v = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}$

Dato che $\frac{\theta}{\theta+1}$ è funzione biunivoca di θ, per l'invarianza degli stimatori di massima verosimiglianza

$$\widehat{\mu}_v = \frac{-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}}{1-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}} = \frac{n}{n-\sum_{i=1}^n \log X_i}$$

2. Calcoliamo la distribuzione di $-\log X$

$$P(-\log X < y) = P(X > e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^1 \theta x^{\theta-1}dx = \;\; 1-e^{-\theta y} \quad se \quad y \in (0,+\infty)$$

$$f_{-\log X}(y) = \theta e^{-\theta y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}$$

Allora $-\log X$ è un'esponenziale di parametro θ,
dunque $-\frac{\sum_{i=1}^n \log X_i}{n}$ è una $Gamma(n, n\theta)$.
Chiamo $Y = -\frac{\sum_{i=1}^n \log X_i}{n}$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y}\frac{(n\theta)^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-n\theta y}dy = \frac{n\theta}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{(n\theta)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}y^{n-2}e^{-n\theta y}dy = \frac{n\theta}{n-1}$$

Dunque lo stimatore di θ è distorto.