**ST1 - Scritto del 17-9-2008**
E. Scoppola

**Soluzione esercizio 1**

1)
$$EX = \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}} dx = \alpha + \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{|y|}{\beta}} dy = \alpha$$
$$E(X^2) = \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}} dx = 2\beta^2 + \alpha^2$$
da cui
$$varX = 2\beta^2$$
$$m_X(t) = Ee^{tX} = \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}} dx = e^{t\alpha}\frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} e^{-\frac{|y|}{\beta}} dy =$$
$$= \frac{e^{t\alpha}}{2}\Big[\frac{1}{1-\beta t} + \frac{1}{1+\beta t}\Big] = \frac{e^{t\alpha}}{1-(\beta t)^2}$$
con $t < \frac{1}{\beta}$.

2) Con il metodo dei momenti dobbiamo eguagliare i momenti assoluti con quelli campionari e dunque abbiamo da considerare il sistema di equazioni:
$$\bar{X} = EX = \alpha$$
$$M_2' := \frac{1}{n}\sum_i X_i^2 = E(X^2) = 2\beta^2 + \alpha^2$$
da cui
$$\hat{\alpha}_m = \bar{X}, \qquad \hat{\beta}_m = \sqrt{\frac{M_2' - \bar{X}^2}{2}}$$

3) Per la funzione verosimiglianza abbiamo:
$$L(\alpha, \beta; x_1, ..., x_n) = \Big(\frac{1}{2\beta}\Big)^n \prod_i e^{-\frac{|x_i-\alpha|}{\beta}}$$
e dunque per la log-verosimiglianza:
$$\ln L = -n \ln 2\beta - \frac{1}{\beta}\sum_i |x_i - \alpha|$$

e dunque otteniamo il sistema di equazioni:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta}\sum_i sgn(x_i - \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -n\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_i |x_i - \alpha| = 0$$

da cui, denotando con $Y_1 = \min\{X_1, ..., X_n\}, Y_2, ..., Y_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$ la statistica d'ordine, otteniamo:

$$\hat{\alpha}_v \in (Y_m, Y_{m+1}), \qquad \text{con } m = \frac{n}{2}$$

$$\hat{\beta}_v = \frac{1}{n}\sum_i |X_i - \alpha|$$

4) Poiché la distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale ad un parametro con $d(x) = |x|$ allora $\sum_i |X_i|$ é una statistica sufficiente, minimale e completa.

5) Abbiamo che le condizioni di regolaritá della distribuzione sono soddisfatte e che
$$\frac{\partial}{\partial \beta}\ln f(X;\beta) = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}|X| = \frac{1}{\beta^2}\Big[|X| - \beta\Big]$$
dunque otteniamo
$$E\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \beta}\ln f(X;\beta)\Big)^2\Big] = E\Big[\Big(\frac{1}{\beta^2}\Big[|X| - \beta\Big)^2\Big] = \frac{1}{\beta^4}var(|X|) = \frac{1}{\beta^2}$$
e dunque per il limite inferiore di CR otteniamo $\frac{\beta^2}{n}$.

6) Poiché $E(\frac{1}{n}\sum_i |X_i|) = E(|X|) = \beta$ abbiamo che $\frac{1}{n}\sum_i |X_i|$ é stimatore non distorto di $\beta$ e dal punto precedente, applicando il teorema di Lehmann-Scheffé, é dunque UMVUE di $\beta$. Nota che $var(\frac{1}{n}\sum_i |X_i|) = \frac{\beta^2}{n}$ cioé eguaglia il limite inferiore di CR.

**Soluzione esercizio 2**

1) La distribuzione di $\bar{X} - \bar{Y}$ é normale di media $\mu_1 - \mu_2$ e varianza $\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}$

2) Ricordando che $\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}$ ha una distribuzione chi-quadrato con $(n-1)$ gradi di libertá e analogamente per il secondo campione, dalla indipendenza statistica abbiamo che $\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2}$ ha una distribuzione chi-quadrato con $(n + m - 2)$ gradi di libertá.

3) Dai punti precedenti abbiamo che:

$$\frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{nm}{n+m}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\frac{1}{n+m-2}}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

ha distribuzione t di Student con $n+m-2$ gradi di libertá. Possiamo con questa trovare un intervallo di confidenza per $\mu_1-\mu_2$ :

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-b\frac{\sqrt{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}}, \bar{X}-\bar{Y}-a\frac{\sqrt{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}}\right)$$

con $a, b$ rispettivamente quantili 0.5 e 0.95 della distribuzione $t(n+m-2)$.