**ST1 - Scritto del 17-6-2008**

E. Scoppola

### Soluzione esercizio 1

1)
$$U = 2S^2 \sim \chi^2_2 = \Gamma(1, \frac{1}{2}) = \exp(\frac{1}{2})$$

2)
$$U + Y \sim \Gamma(2, \frac{1}{2})$$

3)
$$\frac{U}{Y} \sim F(2, 2)$$

4)
$$\frac{X_1}{\sqrt{\frac{Y}{2}}} \sim t(2)$$

### Soluzione esercizio 2

1)
$$\int_0^1 x^{\theta-1} dx = \frac{1}{\theta}$$

da cui $C = \theta$.

2)
$$EX = \theta \int_0^1 x^{\theta} dx = \frac{\theta}{\theta + 1}$$

uguagliando $EX = \bar{x}$ otteniamo $\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$ da cui

$$\Theta_m = \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}}$$

3) La funzione verosimiglianza é:

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = \theta^n e^{(\theta-1)\sum_i \ln x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[0,1]}(x_i)$$

che é massima per $\theta = \hat{\theta}$ soluzione di

$$\frac{n}{\theta} + \sum_i \ln x_i = 0$$

da cui otteniamo

$$\hat{\Theta}_v = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$$

4) La densitá appartiene alla famiglia esponenziale con

$$a(\theta) = \theta, \quad b(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad c(\theta) = \theta - 1, \quad d(x) = \ln x$$

dunque $\sum_{i=1}^n \ln X_i$ é una statistica sufficiente minimale e completa.

5) Sia $Y = -\ln X$ abbiamo

$$f_Y((y;\theta) = e^{-y}\theta e^{-y(\theta-1)}\mathbf{1}_{[0,\infty]}(y) = \theta e^{-\theta y}\mathbf{1}_{[0,\infty]}(y)$$

6) Lo stimatore di $\frac{1}{\theta}$ dato da

$$-\frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i}{n}$$

é non distorto per il punto 5) e funzione di una statistica sufficiente e completa dunque é UMVUE per $\frac{1}{\theta}$ per il lemma di Lehmann-Scheffé.

**Soluzione esercizio 3**

1) La quantitá $Q := X_1\theta$ é pivotale infatti ha distribuzione esponenziale di parametro 1:

$$f_Q(q) = \frac{1}{\theta} f_X(\frac{q}{\theta}, \theta) = e^{-q}\mathbf{1}_{[0,\infty]}(q)$$

Cerco $a$ e $b$ tali che

$$P(a < Q < b) = 0.9$$

cioé $a \simeq 0.0051$ e $b \simeq 2.996$. Abbiamo dunque che

$$(\frac{a}{X_1}, \frac{b}{X_1})$$

é l'intervallo di confidenza richiesto.

2),3) Con il metodo statistico fissando $p_1 = p_2 = 0.05$ abbiamo

$$\int_0^{h_1} \theta e^{-\theta x} dx = 0.05 = \int_{h_2}^{\infty} \theta e^{-\theta x} dx$$

da cui otteniamo

$$e^{-\theta h_1} = 0.95, \qquad e^{-\theta h_2} = 0.05$$

quindi

$$h_1 = \frac{-\ln 0.95}{\theta}, \qquad h_2 = \frac{-\ln 0.05}{\theta}$$

e dunque l'intervallo di confidenza identico al precedente

$$(\frac{a}{X_1}, \frac{b}{X_1})$$