Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.9 del 11/5/2006

Esercizio 1.

(a) La variabile casuale è una $Bernoulli(\theta)$; la verosimiglianza è:

$$L(\theta; \underline{x}) = \theta^{\sum_i x_i}(1-\theta)^{n-\sum_i x_i}$$

Si trova, quindi, che lo stimatore di massima verosimiglianza è $\hat{\Theta} = \overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n}$.

(b) Dalla verosimiglianza si vede che la statistica sufficiente è $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(c) La varianza dello stimatore di massima verosimiglianza è $Var(\hat{\Theta}) = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$, calcolando il limite inferiore di Cramer-Rao si vede che lo stimatore di massima verosimiglianza lo raggiunge, quindi è l'UMVUE cercato.

Esercizio 2. Si ha che $\mathbb{P}(T_1 \le \tau(\theta) \le T_2) = \mathbb{P}(\tau(\theta) \le T_2) - \mathbb{P}(\tau(\theta) \le T_1) = 2\alpha - 1$.

Esercizio 3. Possiamo considerare due diverse quantità pivotali

$$\frac{\overline{X}-\theta}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad \frac{(n-1)S^2}{\theta} \sim \chi^2_{n-1}$$

Possiamo considerare quindi due diversi intervalli di confidenza a seconda se vogliamo stimare θ come la media o come la varianza della distribuzione. Cerchiamo intervalli di livello $1-\alpha$ ($\alpha < 0,5$).

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X}-\theta}{S/\sqrt{n}} \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \overline{X}-\theta \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \theta \le \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(n-1)S^2}{\theta} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \le \theta \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

Esercizio 4. Le variabili sono $Esp(\theta)$, quindi $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n,\theta)$, si può vedere (per esempio attraverso la f.g.m.) che $2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right)$ ovvero χ^2_{2n}.

L'intervallo di confidenza è

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n} \leq 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \leq \theta \leq \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

Esercizio 5.

$$\begin{aligned} 0,95 &= \mathbb{P}\left(-z_{0,975} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{0,3/\sqrt{n}} \leq z_{0,975}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{0,975}\frac{0,3}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{0,975}\frac{0,3}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{X} - 1,96\frac{0,3}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1,96\frac{0,3}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Deve quindi essere $1,96\frac{0,3}{\sqrt{n}} \leq 0,1$ e quindi $n \geq 34,5744$.

Esercizio 6. Indichiamo con θ il peso reale.

$$\begin{aligned} 0,95 &= \mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{0,975}\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leq \theta \leq \overline{X} + z_{0,975}\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(3,1502 - 1,96\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leq \theta \leq 3,1502 + 1,96\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(3,1414 \leq \theta \leq 3,1590\right) \\ 0,99 &= \mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{0,995}\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leq \theta \leq \overline{X} + z_{0,995}\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(3,1502 - 2,57\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leq \theta \leq 3,1502 + 2,57\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(3,1387 \leq \theta \leq 3,1617\right) \end{aligned}$$