Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.8 del 4/5/2006

Esercizio 1.

(a) X è una statistica sufficiente, lo si può vedere fattorizzando la densità. Per la completezza si può procedere con la definizione: facciamo vedere che se $\mathbb{E}[z(X)] \equiv 0\ \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(z(X)=0)=1\ \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1$.
$\mathbb{E}[z(X)] = \sum_x z(x) \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} = \theta \left(\frac{z(-1)}{2} - z(0) + \frac{z(1)}{2} \right) + z(0) \equiv 0\ \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ (essendo un polinomio in θ) tutti i suoi coefficienti sono nulli $\quad \Leftrightarrow \quad z(0)=0$ e $z(-1)=z(1)\ \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, quindi X non è completa.

(b) $|X|$ è una statistica sufficiente. Per la completezza procediamo come sopra.
$\mathbb{E}[z(|X|)] = z(0)(1-\theta) + z(1)\theta = \theta(z(1)-z(0)) + z(0) \equiv 0$
$\forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ (essendo un polinomio in θ) tutti i suoi coefficienti sono nulli $\quad \Leftrightarrow \quad z(0)=0$ e $z(1)=0\ \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, quindi $|X|$ è completa.

(c) Si calcola facilmente che $\hat{\Theta} = |X|$.

(d) $\mathbb{E}(T = t(X)) = \mathbb{E}(2 \cdot \mathbb{1}_{\{1\}}(x)) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$. Quindi è uno stimatore corretto.

(e) Si può riscrivere la densità come

$$f(x;\theta) = e^{\log(1-\theta)} e^{|x|(\log\frac{\theta}{2} - \log(1-\theta))} \mathbb{1}_{\{-1,0,1\}}(x)$$

quindi appartiene alla famiglia esponenziale e per il teorema $|X|$ è statistica sufficiente minimale completa.

Esercizio 2.

(a) $\mathbb{E}(X) = \int_0^\theta x \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta}{2}$. Quindi lo stimatore del metodo dei momenti è

$T_1 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$

$\mathbb{E}(T_1) = \theta$ e $MSE(T_1) = \frac{\theta^2}{3n}.$

(b) Si trova che $T_2 = X_{(n)} = \max_n\{X_1, \ldots, X_n\}$. Per poter calcolare media e errore quadratico medio abbiamo bisogno di conoscere la sua distribuzione:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(n)} \leqslant x) &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \ldots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \\ &= \left(\int_0^x \frac{1}{\theta} dy\right)^n = \frac{x^n}{\theta^n}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$$

$\mathbb{E}(T_2) = \frac{n\theta}{n+1}$ e $MSE(T_2) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$

Esercizio 3. Siano $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. estratti da una popolazione X con funzione di densità $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}$ con $x > 0$ e $\theta > 0$.

(a) Si vede subito che la distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale.

(b) Scrivendo la distribuzione congiunta di $X_1, \ldots, X_n$ (che è anche la verosimiglianza) si vede che questa appartiene alla famiglia esponenziale e che quindi $\sum_{i=1}^{n} X_i$ è una statistica sufficiente minimale completa.

(c) $\mathbb{E}(X) = 2\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(\overline{X}) = 2\theta$ quindi non è uno stimatore corretto, ma lo si può correggere prendendo $\hat{\Theta} = \frac{\overline{X}}{2}$.

(d) $MSE(\hat{\Theta}) = \frac{\theta^2}{2n}.$

(e) Lo stimatore di massima verosimiglianza è proprio lo stimatore $\hat{\Theta}$ precedentemente calcolato, quindi sappiamo già che è corretto; se calcoliamo l'informazione attesa di Fisher vediamo che $I(\theta) = \frac{2n}{\theta^2}$ e che questo stimatore raggiunge il limite inferiore di C-R, risulta quindi essere un UMVUE.