Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.7 del 27/4/2006

Esercizio 1.

(a) $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i$

$\Rightarrow \quad T$ è stimatore non distorto $\Leftrightarrow \mathbb{E}(T) = \mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$

(b) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{2}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}$

$Var(T) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2 = \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\right] \geqslant \frac{\sigma^2}{n}$

l'uguaglianza vale $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{n}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a_i = \frac{1}{n}\ \forall i.$

Esercizio 2.

(a) X è una statistica sufficiente, poiché si vede che è possibile fattorizzare la verosimiglianza (che in questo caso è la stessa densità) come prodotto di una funzione dipendente dalle sole osservazioni (in questo caso è la funzione indicatrice) e una dipendente da X e da θ.

(b) $|X|$ è una statistica sufficiente: infatti come sopra nella densità compare X^2 che può essere riscritto come $|X|^2$.

(c) $\mathbb{E}(X^2) = Var(X^2) = \theta$, quindi è uno stimatore non distorto.

(d) Lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è $\hat{\theta} = X^2$, poiché la radice è una funzione biunivoca si può applicare il teorema scrivendo: $\hat{\psi} = \sqrt{\hat{\theta}} = |X|$.

(e) Il momento secondo è la varianza quindi: $X^2 = \theta$ e quindi $\hat{\theta} = |X|$.

(f) MSE=$Var(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - (\mathbb{E}(X^2))^2$. Si calcola la $f.g.m(X) = e^{\frac{1}{2}\theta t^2}$, si scrive la derivata quarta e la si calcola in t=0, si trova che il momento quarto è $3\theta^2$. Quindi MSE=$2\theta^2$.

L'informazione attesa di Fisher è: $I(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta)\right) = \frac{1}{2\theta^2}$, quindi il limite inferiore di C-R è: $\frac{1}{I} = 2\theta^2 = Var(X^2)$, quindi lo stimatore è un UMVUE.

Esercizio 3. Indichiamo con $R_i = R + \epsilon_i$ la i-sima misurazione del raggio. È vero che $R_i \sim N(R, \sigma^2)$. Lo stimatore di massima verosimiglianza del raggio è: $\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$, prendiamo quindi come stimatore dell'area del cerchio la quantità $\pi\hat{R}^2$. Calcoliamo la media di questo stimatore: $\mathbb{E}(\pi\hat{R}^2) = \pi\mathbb{E}\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}\right)^2\right] =$
$\pi\mathbb{E}\left(\frac{\sum_i R_i \sum_j R_j}{n^2}\right) = \pi\mathbb{E}\left(\frac{\sum_i\sum_j R_iR_j}{n^2}\right) = \pi\left[\frac{n(n-1)}{n^2}R^2 + \frac{1}{n}\mathbb{E}(R_1^2)\right] =$
$\pi\left[\frac{n-1}{n}R^2 + \frac{1}{n}\left(Var(R_1) + (\mathbb{E}(R_1))^2\right)\right] = \pi\left(\frac{n-1}{n}R^2 + \frac{\sigma^2 + R^2}{n}\right) = \pi\left(R^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
Quindi questo non è uno stimatore corretto, dobbiamo quindi correggerlo, per esempio, nel seguente modo: lo stimatore di massima verosimiglianza per σ^2 è $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - R)^2}{n}$ ed è uno stimatore corretto come si può vedere facendone il valore atteso, quindi $\hat{A} = \pi\hat{R}^2 - \pi\frac{\hat{\sigma}^2}{n}$ è tale che $\mathbb{E}(\hat{A}) = \pi R^2$ e risulta essere uno stimatore corretto dell'area del cerchio. Un altro stimatore corretto è $\hat{A} = \pi\hat{R}^2\frac{n}{n-1} - \pi\frac{\sum_{i=1}^n R_i^2}{n(n-1)}$ che si ottiene con una diversa correzione.