

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006  
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.7 del 27/4/2006

**Esercizio 1.** Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione casuale da una qualche densità che ha media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ .

- (a) Mostrate che  $\sum_{i=1}^n a_i X_i$  è uno stimatore non distorto di  $\mu$  per ogni insieme di costanti note  $a_1, \dots, a_n$  che soddisfano  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ .
- (b) Se  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , mostrate che la  $Var \left[ \sum_{i=1}^n a_i X_i \right]$  è minima per  $a_i = 1/n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . [Suggerimento: dimostrate che  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - 1/n)^2 + 1/n$  quando  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ .]

**Esercizio 2.** Sia  $X$  una singola osservazione da  $N(0, \theta)$ . ( $\theta = \sigma^2$ ).

- (a)  $X$  è una statistica sufficiente?  
(b)  $|X|$  è una statistica sufficiente?  
(c)  $X^2$  è uno stimatore non distorto di  $\theta$ ?  
(d) Qual è uno stimatore di massima verosimiglianza di  $\sqrt{\theta}$ ?  
(e) Qual è uno stimatore del metodo dei momenti di  $\sqrt{\theta}$ ?  
(f) Trovare il MSE dello stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ . È un UMVUE?

**Esercizio 3.** Il raggio di un cerchio viene misurato con un errore di misura che ha distribuzione  $N(0, \sigma^2)$ , con  $\sigma^2$  incognita. Date  $n$  misure indipendenti del raggio, trovate uno stimatore non distorto dell'area del cerchio.