Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.6 del 20/4/2006

Esercizio 1.

(a)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} xy \mathbb{1}_{(0,x)}(y) \mathbb{1}_{(0,2)}(x) dy = \int_0^x \frac{1}{2} xy \mathbb{1}_{(0,2)}(x) dy = \\ = \frac{1}{2} x \frac{x^2}{2} \mathbb{1}_{(0,2)}(x) = \frac{1}{4} x^3 \mathbb{1}_{(0,2)}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} xy \mathbb{1}_{(0,x)}(y) \mathbb{1}_{(0,2)}(x) dx = \int_y^2 \frac{1}{2} xy \mathbb{1}_{(0,2)}(y) dx = \\ = \frac{1}{2} y \mathbb{1}_{(0,2)}(y) \left. \frac{x^2}{2} \right|_y^2 = \frac{1}{4} y(4 - y^2) \mathbb{1}_{(0,2)}(y) = \left(y - \frac{1}{4} y^3 \right) \mathbb{1}_{(0,2)}(y)$$

(b) se fossero indipendenti sarebbe $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, ma ciò non è vero quindi X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 2.
Siano $Z = X^2$ e $W = Y^2$, la trasformazione $(z,w) = (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (x^2, y^2)$ è biunivoca su $(0,1) \times (0,1)$, le derivate parziali delle componenti di $g^{-1}(z,w) = (\sqrt{z}, \sqrt{w})$ sono continue sul dominio, il determinante dello Jacobiano di g^{-1} è $\frac{1}{4\sqrt{z}\sqrt{w}} \neq 0$, possiamo quindi applicare il teorema e quindi la densità congiunta di Z e W è:

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(\sqrt{z}, \sqrt{w}) \left| \det(J(g^{-1})) \right| = \\ = 4\sqrt{z}\sqrt{w} \frac{1}{4\sqrt{z}\sqrt{w}} \mathbb{1}_{(0,1)}(\sqrt{z}) \mathbb{1}_{(0,1)}(\sqrt{w}) = \mathbb{1}_{(0,1)}(z) \mathbb{1}_{(0,1)}(w)$$

Si potrebbe anche calcolare le marginali di X e Y, osservare che le due v.c. sono indipendenti, calcolare le distribuzioni di X^2 e Y^2 (sempre indipendenti) e calcolare la congiunta facendo il prodotto delle due.

Esercizio 3.
Si vede che le due variabili sono estratte da $Esp(\frac{1}{2})$ che è anche un χ^2_2, quindi $\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_1/2}{X_2/2} \sim F(2,2)$.

Esercizio 4.

(a)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y) dy = \int_{0}^{+\infty} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) dy =$$
$$= -e^{-(x+y)}\Big|_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

Per simmetria: $f_Y(y) = e^{-y} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)$.

(b) $\mathbb{P}(1 < X + Y < 2) = \mathbb{P}(X + Y < 2) - \mathbb{P}(X + Y < 1)$

$$\mathbb{P}(X + Y < 2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x+y<2\}} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy\ e^{-(x+y)} =$$
$$= \int_0^2 dx\ \left[-e^{-(x+y)}\right]_0^{2-x} = \int_0^2 dx\ \left[-e^{-2} + e^{-x}\right] =$$
$$= -e^{-2}\ x\big|_0^2 - e^{-x}\big|_0^2 = -2e^{-2} - e^{-2} + 1 = 1 - 3e^{-2}$$
$$\mathbb{P}(X + y < 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x+y<1\}} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\ e^{-(x+y)} =$$
$$= \int_0^1 dx\ \left[-e^{-(x+y)}\right]_0^{1-x} = \int_0^1 dx\ \left[-e^{-1} + e^{-x}\right] =$$
$$= -e^{-1}\ x\big|_0^1 - e^{-x}\big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$$

$$\mathbb{P}(1 < X + Y < 2) = 1 - 3e^{-2} - (1 - 2e^{-1}) = 2e^{-1} - 3e^{-2}$$

(c) $\mathbb{P}(X < Y | X < 2Y) = \dfrac{\mathbb{P}(X < Y, X < 2Y)}{\mathbb{P}(X < 2Y)} = \dfrac{\mathbb{P}(X < Y)}{\mathbb{P}(X < 2Y)}$

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x<y\}} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{y} dx\ e^{-(x+y)} =$$
$$= \int_0^{+\infty} dy\ \left[-e^{-(x+y)}\right]_0^{y} = \int_0^{+\infty} dy\ \left[-e^{-2y} + e^{-y}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\ e^{-2y}\big|_0^{+\infty} - e^{-y}\big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X < 2Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x<2y\}} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{2} y dx\ e^{-(x+y)} =$$
$$= \int_0^{+\infty} dy\ \left[-e^{-(x+y)}\right]_0^{2} y = \int_0^{+\infty} dy\ \left[-e^{-3y} + e^{-y}\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\ e^{-3y}\big|_0^{+\infty} - e^{-y}\big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(X < Y | X < 2Y) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$