Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.2 del 16/3/2006

Esercizio 0. Sia S^2 la varianza campionaria corretta, calcoliamo la sua varianza.

$$Var(S^2) = \mathbb{E}((S^2)^2) - (\mathbb{E}(S^2))^2 = \mathbb{E}((S^2)^2) - \sigma^4.$$

Calcoliamo quindi $\mathbb{E}((S^2)^2)$, usando l'uguaglianza:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2.$$

$$\mathbb{E}((S^2)^2) = \mathbb{E}\left(\left[\frac{1}{n-1}\left\{\sum_i (X_i-\mu)^2 - n(\overline{X}-\mu)^2\right\}\right]^2\right)$$

usiamo l'uguaglianza $\qquad (\overline{X}-\mu) = \frac{1}{n}\sum_i (X_i-\mu)$

$$\mathbb{E}((S^2)^2) = \frac{1}{(n-1)^2}\mathbb{E}\left(\left[\sum_i^n (X_i-\mu)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_i^n (X_i-\mu)\right]^2\right]^2\right)$$

indichiamo con $\quad a_i = X_i - \mu \quad$ e usiamo l'uguaglianza

$$\left(\sum_i b_i\right)^2 = \sum_i b_i^2 + 2\sum_{i\neq j} b_i b_j \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((S^2)^2) &= \frac{1}{(n-1)^2}\mathbb{E}\left(\left[\sum_i a_i^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_i a_i^2 + 2\sum_{i\neq j} a_i a_j\right]\right]^2\right) = \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\mathbb{E}\left(\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_i a_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i\neq j} a_i a_j\right]^2\right) = \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\mathbb{E}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\sum_i a_i^2\right)^2 + \frac{4}{n^2}\left(\sum_{i\neq j} a_i a_j\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. -\frac{4}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{i\neq j} a_i a_j \sum_k a_k^2\right\} = \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\mathbb{E}\left\{\frac{(n-1)^2}{n^2}\left[\sum_i a_i^4 + 2\sum_{i\neq j} a_i^2 a_j^2\right] + \frac{4}{n^2}\sum_{i\neq j} a_i^2 a_j^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{n^2} 2 \sum_{\substack{i\neq j \\ k\neq l}} a_i a_j a_k a_l - \frac{4}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{i\neq j} a_i a_j \sum_k a_k^2\right\}
\end{aligned}$$

avendo riapplicato (1) ed essendo $\mathbb{E}(a_i) = \mathbb{E}(X_i - \mu) = 0\ \forall i$, $\mathbb{E}(a_i a_j) = \mathbb{E}((X_i - \mu)(X_j - \mu)) = 0\ \forall i \neq j$, $\mathbb{E}(a_i^2) = \mathbb{E}((X_i - \mu)^2) = \sigma^2\ \forall i$ e $\mathbb{E}(a_i^4) = \mathbb{E}((X_i - \mu)^4) = \mu_4\ \forall i$ il momento centrato quarto, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((S^2)^2) &= \frac{1}{(n-1)^2}\left\{\frac{(n-1)^2}{n^2}\left[n\mu_4 + 2\frac{n(n-1)}{2}\sigma^4\right] + \frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\sigma^4\right\} = \\
&= \frac{1}{n}\left[\mu_4 + (n-1)\sigma^4 + \frac{2}{n-1}\sigma^4\right].
\end{aligned}$$

Tornando, quindi, alla varianza abbiamo:

$$\begin{aligned}
Var(S^2) &= \frac{1}{n}\left[\mu_4 + (n-1)\sigma^4 + \frac{2}{n-1}\sigma^4\right] - \sigma^4 = \\
&= \frac{1}{n}\left[\mu_4 + (n-1)\sigma^4 + \frac{2}{n-1}\sigma^4 - n\sigma^4\right] = \\
&= \frac{1}{n}\left[\mu_4 - \sigma^4\Big(1 - \frac{2}{n-1}\Big)\right] = \frac{1}{n}\left[\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x) &= \sum_{y=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{y=1}^{+\infty} \frac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)} = \\
&= \sum_{y=1}^{+\infty} \frac{C}{2}\left\{\frac{1}{(x+y-1)(x+y)} - \frac{1}{(x+y)(x+y+1)}\right\} = \\
&= \frac{C}{2}\frac{1}{x(x+1)} = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Deve essere poi:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{C}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 1 \quad \text{e poiché} \quad \sum_{x=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 1 \quad \text{deve essere } C = 2.$$

Esercizio 2. Si vede che $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{3}\quad i = 1, 2, 3$ e $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{3}\quad j = 1, 2, 3$ poiché $\frac{1}{3}$ è la probabilità che si verifichi uno dei tre eventi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Stesso discorso per W_1 che però in corrispondenza dei tre eventi assume, rispettivamente, i valori: $3, 5, 4$ con probabilità $\frac{1}{3}$, per W_2 che assume, rispettivamente, i valori: $2, 6, 3$ sempre con probabilità $\frac{1}{3}$ e per W_3 che assume i valori $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3$ con probabilità $\frac{1}{3}$. Per quanto riguarda le due probabilità condizionate sappiamo che $\mathbb{P}(Y = i|Z = j) = \frac{\mathbb{P}(Y=i, Z=j)}{\mathbb{P}(Z=j)}$ e quindi abbiamo:

$$\begin{matrix}
\mathbb{P}(Y = 2|Z = 2) = \frac{1}{2} & \mathbb{P}(Y = 3|Z = 2) = \frac{1}{2} & \mathbb{P}(Y = 1|Z = 2) = 0 \\
\mathbb{P}(Y = 2|Z = 1) = 0 & \mathbb{P}(Y = 3|Z = 1) = 0 & \mathbb{P}(Y = 1|Z = 1) = 1
\end{matrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(Z=2|Y=2)=1 & \mathbb{P}(Z=1|Y=2)=0 \\ \mathbb{P}(Z=2|Y=3)=1 & \mathbb{P}(Z=1|Y=3)=0 \\ \mathbb{P}(Z=2|Y=1)=0 & \mathbb{P}(Z=1|Y=1)=1 \end{array}$$

Esercizio 3.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{y=0}^{k} \mathbb{P}(X+Y=k, Y=y) = \\ &= \sum_{y=0}^{k} \mathbb{P}(X+Y=k|Y=y)\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{y=0}^{k} \mathbb{P}(X+y=k)\mathbb{P}(Y=y) = \\ &= \sum_{y=0}^{k} \frac{\lambda^{k-y}e^{-\lambda}}{(k-y)!}\frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{y=0}^{k}\frac{k!}{y!(k-y)!}\lambda^{k-y}\mu^y = \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{y=0}^{k}\binom{k}{y}\mu^y\lambda^{k-y} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k \sim Po(\lambda+\mu). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k|Z=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(Z=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(Z=n)} = \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\frac{\mu^{n-k}e^{-\mu}}{(n-k)!}\frac{n!}{(\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} = \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

e poiché $1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \Rightarrow$ si distribuisce come $Bin(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$.

Esercizio 4.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_0^{+\infty} e^{tx}\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-\lambda x}x^{\nu-1}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-(\lambda-t)x}x^{\nu-1}dx = \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\nu}{(\lambda-t)^\nu}\frac{(\lambda-t)^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-(\lambda-t)x}x^{\nu-1}dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\nu \end{aligned}$$

Ci ricordiamo che la f.g.m. di una v.c. $Esp(\lambda)$ è $\frac{\lambda}{\lambda-t}$ abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tS}) &= \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) = \\ &= \left(\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \end{aligned}$$

quindi la somma di n $Esp(\lambda)$ indipendenti si distribuisce come $Gamma(n,\lambda)$.