Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.10 del 18/5/2006

Esercizio 1.

(a) (i) $\pi_Y(\theta) = \mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 6 \;\Big|\; \theta\right) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i}\theta^i(1-\theta)^{10-i}$

(ii) $\sup_{\theta \leq \frac{1}{2}} \pi_Y(\theta) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} = 1 - \sum_{i=0}^{5} \binom{10}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} =$
$= 1 - 0,623 = 0,377$, che il sup sia raggiunto in 0,5 lo si può vedere tramite le tavole della binomiale o pensando a come si concentra la probabilità.

(b) (i) $L\left(\frac{1}{2}\right) = \prod_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; $L\left(\frac{1}{4}\right) = \prod_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_i}\left(\frac{3}{4}\right)^{1-x_i} =$
$= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} 3^{10-\sum_i x_i}$. Il test più potente è dato dal lemma di Neyman-Pearson:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{10} 3^{10-\sum_i x_i}} \leq k^* \;\Leftrightarrow\; \frac{2^{20}}{2^{10}\; 3^{10-\sum_i x_i}} \leq k^* \;\Leftrightarrow$$

$$-\left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i\right)\log 3 \leq \log\frac{k^*}{2^{10}} = k' \;\Leftrightarrow\; 10 - \sum_{i=1}^{10} x_i \geq -\frac{k'}{\log 3} = k'' \;\Leftrightarrow$$

$\sum_{i=1}^{10} x_i \leq n + k'' = k \;\Rightarrow$ la regione critica è $C = \left\{(x_1, \ldots, x_{10})\Big| \sum_{i=1}^{10} x_i \leq k\right\}$

Troviamo k (se possibile) imponendo l'ampiezza del test:
$\alpha = 0,0547 = \mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta_0) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq k\Big|\theta_0\right) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{10-i}$
Dalle tavole si vede che k=2 soddisfa la relazione. Quindi il test più potente è individuato dalla regione critica $C = \left\{(x_1, \ldots, x_{10})\Big| \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2\right\}$.

(ii) La potenza del test in θ_1 è: $\sum_{i=0}^{2}\binom{10}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$

Esercizio 2.

(a) La distribuzione congiunta di X_1, X_2 è $f(x_1, x_2) = \theta^2 (x_1 x_2)^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_1) \mathbb{1}_{(0,1)}(x_2)$

$$\pi_Y(\theta) = \mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta) = \mathbb{P}\left(\frac{3}{4}X_1 \leq X_2\right) =$$

$$\int_0^1 dx_1 \int_{\frac{3}{4}x_1}^1 \theta^2 x_1^{\theta-1} x_2^{\theta-1} dx_2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^\theta$$

$$\sup_{\theta \leq 1} \pi_Y(\theta) = \sup_{\theta \leq 1} \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^\theta\right] = 1 - \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

(b) $L(\theta) = \theta^2 (x_1 x_2)^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_1) \mathbb{1}_{(0,1)}(x_2)$. Il test più potente è dato dal lemma di Neyman-Pearson:
$\dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = \dfrac{1}{4x_1x_2} \leq k^* \ \Leftrightarrow \ x_1 x_2 \geq \dfrac{1}{4k^*} = k \ \Rightarrow$ la regione critica è
$C = \{(x_1, x_2)|x_1x_2 \geq k\}$.
Troviamo k (se possibile) imponendo l'ampiezza del test:
$\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \log 2) = \mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta_0) = \mathbb{P}(X_1X_2 \geq k|\theta_0) = \displaystyle\int_k^1 dx_1 \int_{\frac{k}{x_1}}^1 dx_2 =$
$= 1 - k + k \log k$. Si vede che per k$=\frac{1}{2}$ è verificata l'uguaglianza. Quindi il test più potente è individuato dalla regione critica $C = \left\{(x_1, x_2)|x_1x_2 \geq \frac{1}{2}\right\}$.

Esercizio 3.

(a) $\mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta_0) = \mathbb{P}(|X| > 2|\theta_0) = \mathbb{P}(X < -2) + \mathbb{P}(X > 2) = 2\mathbb{P}(X < -2) =$
$= 2\Phi(-2) = 0,0456$.
La potenza del test sotto $\mathbb{H}_1$ è data da:
$\mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta_1) = \mathbb{P}(|X| > 2|\theta_1) = \mathbb{P}(X < -2|\theta_1) + \mathbb{P}(X > 2|\theta_1) =$
$= \mathbb{P}\left(\dfrac{X-1}{\sqrt{2}} < \dfrac{-2-1}{\sqrt{2}}\Big|\theta_1\right) + \mathbb{P}\left(\dfrac{X-1}{\sqrt{2}} > \dfrac{2-1}{\sqrt{2}}\Big|\theta_1\right) = \Phi\left(\dfrac{-3}{\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

(b) Il test più potente è dato dal lemma di Neyman-Pearson:
$\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}} = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2+2x-1}{4}} \leq k^* \ \Leftrightarrow \ -x^2 - 2x + 1 \leq k' \ \Leftrightarrow \ x^2 + 2x - 1 \geq k \ \Rightarrow$
la regione critica è $C = \{x|x^2 + 2x - 1 \geq k\}$.