Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.9 del 29/5/2007

Esercizio 1. Il test più potente è quello di Neymann-Pearson. Calcoliamo il rapporto tra le verosimiglianze:

$$
\begin{aligned}
\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} \leqslant k \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{-\frac{1}{50}\sum_i (x_i-\mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{50}\sum_i (x_i-\mu_1)^2}} \leqslant k \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{50}(\sum_i (x_i-\mu_0)^2 - \sum_i (x_i-\mu_1)^2)} \leqslant k \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2) \geqslant k_1 \\
&\Leftrightarrow \quad n\mu_o^2 - 2\mu_0 \sum_{i=1}^n x_i - n\mu_1^2 + 2\mu_1 \sum_{i=1}^n x_i \geqslant k_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i (2\mu_1 - 2\mu_0) \geqslant k_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i \leqslant k_4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \leqslant k^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,025 &= \mathbb{P}(\overline{X} \leqslant k^* | \mu_0) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{k^*-\mu_0}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \middle| \mu_0 \right) = \\
&= \mathbb{P}\left(N(0,1) \leqslant \frac{k^*-\mu_0}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{k^*-\mu_0}{\frac{5}{\sqrt{n}}} = z_{0,025} = -1,96 \\
&\Rightarrow \quad k^* = 10 - \frac{9,8}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,025 &= \mathbb{P}(\text{Accettare } \mathbb{H}_0 | \mu_1) = \mathbb{P}(\overline{X} > k^* | \mu_1) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{5}{\sqrt{n}}} > \frac{k^*-\mu_1}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \middle| \mu_1 \right) = \\
&= \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{k^*-\mu_1}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{k^*-\mu_1}{\frac{5}{\sqrt{n}}} = z_{0,975} = 1,96 \\
&\Rightarrow \quad k^* = 5 + \frac{9,8}{\sqrt{n}} \\
&\Rightarrow \quad 10 - \frac{9,8}{\sqrt{n}} = 5 + \frac{9,8}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = 3,92 \quad \Rightarrow \quad n = 16.
\end{aligned}
$$

Il test più potente di ampiezza $\alpha = 0,025$ è quello con regione critica
$C = \{(X_1, \ldots, X_n) | \overline{X} \leqslant 7,5\}$.

Esercizio 2.

(a) (i) $\pi_Y(\theta) = \mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0 | \theta) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 6 \;\middle|\; \theta \right) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} \theta^i (1-\theta)^{10-i}$

(ii) $\sup_{\theta \leq \frac{1}{2}} \pi_Y(\theta) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} = 1 - \sum_{i=0}^{5} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} =$

$= 1 - 0,623 = 0,377$, che il sup sia raggiunto in 0,5 lo si può vedere tramite le tavole della binomiale o pensando a come si concentra la probabilità.

(b) (i) $L\left(\frac{1}{2}\right) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; $L\left(\frac{1}{4}\right) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{x_i} \left(\frac{3}{4}\right)^{1-x_i} =$
$= \left(\frac{1}{4}\right)^{10} 3^{10-\sum_i x_i}$. Il test più potente è dato dal lemma di Neyman-Pearson:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{10} 3^{10-\sum_i x_i}} \leq k^* \Leftrightarrow \frac{2^{20}}{2^{10}\, 3^{10-\sum_i x_i}} \leq k^* \Leftrightarrow$$

$$-\left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i\right) \ln 3 \leq \ln \frac{k^*}{2^{10}} = k' \Leftrightarrow 10 - \sum_{i=1}^{10} x_i \geq -\frac{k'}{\ln 3} = k'' \Leftrightarrow$$

$\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 10 - k'' = k \Rightarrow$ la regione critica è $C = \left\{(x_1, \dots, x_{10}) \Big| \sum_{i=1}^{10} x_i \leq k\right\}$

Troviamo k (se possibile) imponendo l'ampiezza del test:
$\alpha = 0,0547 = \mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta_0) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq k \Big| \theta_0\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10-i}$
Dalle tavole si vede che k=2 soddisfa la relazione. Quindi il test più potente è individuato dalla regione critica $C = \left\{(x_1, \dots, x_{10}) \Big| \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2\right\}$.

(ii) La potenza del test in θ_1 è: $\sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$

Esercizio 3.

a) Si ha che

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{10}} e^{-\frac{y^2}{10}} e^{\frac{\mu y}{5}}$$

La distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale, applichiamo il teorema 9.5 pag. 423 (M.G.B.): $c(\mu) = \frac{\mu}{5}$, $d(y) = y$; la statistica da usare è $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ e poiché $c(\mu)$ è una funzione monotona crescente la regione critica sarà $C = \{(Y_1, \dots, Y_n)|T > k\}$ con k tale che l'errore di I specie sia pari ad α.

$$0,05 = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i > k \Big| \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu_0 > k - n\mu_0 \Big| \mu_0\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_i Y_i - n\mu_0}{\sqrt{5n}} > \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{5n}} \Big| \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{5n}}\right),$$

quindi $\frac{k - n\mu_0}{\sqrt{5n}} = z_{1-\alpha} = 1,65 \quad \Rightarrow \quad k = n\mu_0 + \sqrt{5n}1,65 = 156,5$. Quindi il test uniformemente più potente di ampiezza $\alpha = 0,05$ è dato dalla regione critica $C = \{(Y_1, \dots, Y_n)|\overline{Y} > 7,825\}$.

b)

$$\pi(\mu) = \mathbb{P}(\text{Rifiutare } \mathbb{H}_0|\mu) = \mathbb{P}(\overline{Y} > 7,825|\mu) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}}} > \frac{7,825-\mu}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{7,825-\mu}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}}}\right)$$

Abbiamo che:

$$\pi(7,5) = \mathbb{P}(N(0,1) > 0,65) = 0,2578,$$
$$\pi(8) = \mathbb{P}(N(0,1) > -0,35) = 0,6368,$$
$$\pi(8,5) = \mathbb{P}(N(0,1) > -1,35) = 0,9115$$

e che

$$\pi(9) = \mathbb{P}(N(0,1) > -2,35) = 0,9906.$$

Esercizio 4. Riscriviamo la funzione di densità:

$$f(x,\theta) = (\theta+2)x^{\theta+1} = (\theta+2)e^{(\theta+1)\ln x},$$

quindi appartiene alla famiglia esponenziale e possiamo applicare il teorema: $c(\theta) = \theta + 1$ è una funzione monotona crescente e la statistica da usare è $T = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$. Calcoliamo la distribuzione di $Y = -\ln X$.

$$f_Y(y) = (\theta+2)e^{-(\theta+1)y}e^{-y} = (\theta+2)e^{-(\theta+2)y} \sim Esp(\theta+2)$$

Quindi $\sum_{i=1}^{n} Y_i = -\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \sim Gamma(n, \theta+2)$.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > k \Big| \theta_0\right) = \mathbb{P}\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i < k_1 \Big| \theta_0\right) =$$
$$= \mathbb{P}(Gamma(n,\theta_0+2) < k_1) = \int_0^{k_1} \frac{(\theta_0+2)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-(\theta_0+2)x}\,\mathrm{d}x.$$

Il test uniformemente più potente di ampiezza α è dato dalla regione critica $C = \left\{(X_1,\ldots,X_n) \Big| \sum_{i=1}^{n} \ln X_i > k\right\}$, dove $k_1 = -k$ è il quantile di livello α di una $Gamma(n, \theta_0+2)$.

Esercizio 5. Le variabili sono $Gamma(2,\theta)$ e la densità appartiene alla famiglia esponenziale. La funzione $c(\theta) = -\theta$ è decrescente, la statistica da utilizzare è $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e la statistica si distribuisce come una $Gamma(2n,\theta)$, quindi $\alpha = \mathbb{P}(T < k^*)$ e la regione critica del test UMP è $C = \{(x_1,\ldots,x_n)|T < k^*\}$, con k^* che verifica la relazione sopra.