Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.9 del 29/5/2007

Esercizio 1. Siano $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, 25)$. Si vuole testare il seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{cases} \mathbb{H}_0: \ \mu_0 = 10 \\ \mathbb{H}_1: \ \mu_1 = 5 \end{cases}$$

Trovare l'ampiezza n per cui il test più potente ha $\alpha = \beta = 0,025$, dove α e β sono, rispettivamente gli errori di I e II specie.

Esercizio 2. È data una variabile casuale $X \sim Be(\theta)$.

(a) Per un campione casuale di ampiezza $n = 10$, verificate $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \leq \frac{1}{2} \\ \mathbb{H}_1 : \theta > \frac{1}{2} \end{cases}$. Usate la regione critica $C = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 6 \right\}$.

  (i) Trovate la funzione di potenza.

  (ii) Qual è l'ampiezza di questo test?

(b) Per un campione casuale di ampiezza $n = 10$.

  (i) Trovate il test più potente di ampiezza α ($\alpha = 0,0547$) per $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta_0 = \frac{1}{2} \\ \mathbb{H}_1 : \theta_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$.

  (ii) Trovate la potenza del test più potente per $\theta = \frac{1}{4}$.

Esercizio 3. Siano $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, 5)$. Sia $n = 20$, vogliamo testare il seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{cases} \mathbb{H}_0: \ \mu_0 = 7 \\ \mathbb{H}_1: \ \mu_1 > 7 \end{cases}$$

a) Trovare il test uniformemente più potente di livello $0,05$.

b) Per il test ricavato in (a) calcolare la funzione di potenza in $\mu = 7,5$, $\mu = 8$, $\mu = 8,5$, $\mu = 9$.

Esercizio 4. Siano $X_1, \ldots, X_n \sim f(x, \theta) = (\theta + 2)x^{\theta+1}, \quad 0 < x < 1, \ \theta > -2$. Si vuole testare il seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{cases} \mathbb{H}_0: \ \theta \leqslant \theta_0 \\ \mathbb{H}_1: \ \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Trovare il test uniformemente più potente di ampiezza α.

Esercizio 5. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da

$$f(x; \theta) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

Vedere se esiste un test uniformemente più potente di ampiezza α per verificare

$$\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \leq 1 \\ \mathbb{H}_1 : \theta > 1 \end{cases}$$