Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.8 del 22/5/2007

Esercizio 1. Supponiamo che la variabile casuale $Y \sim Gamma(2, \beta)$. Mostrate, sia con il cambio di variabili che con il metodo della funzione generatrice dei momenti, che $Z = 2\beta Y \sim \chi^2_4$. Usate Z come quantità pivotale per trovare un intervallo di confidenza di livello $0,90$ per β.

Esercizio 2. Siano $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, sia $Y_{(n)} = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, sia $U = \frac{1}{\theta} Y_{(n)}$.

a) Mostrare che U ha la seguente funzione di distribuzione:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u^n & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$

b) Poiché la distribuzione di U non dipende dal parametro θ, U è una quantità pivotale, usarla per trovare un intervallo di confidenza inferiore di livello $0,95$.

Esercizio 3. Due partite di frigoriferi, indicate con A e B, hanno entrambe 1 anno di garanzia. In un campione casuale di 50 frigoriferi della partita A, 12 hanno avuto un malfunzionamento prima del termine della garanzia. In un campione indipendente di 60 frigoriferi della partita B sono stati osservati 12 malfunzionamenti entro il termine della garanzia. Stimate la differenza reale $p_1 - p_2$ tra le proporzioni di frigoriferi malfunzionanti in periodo di garanzia tramite un intervallo di confidenza di livello $0,98$.

Esercizio 4. Siano $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ nota. Si vuole testare il seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \mathbb{H}_1 : \ \sigma^2 = \sigma_1^2 \end{cases}$$

Sapendo che $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$, verificare che una generica regione critica è del tipo

$$C = \left\{ (X_1, \dots, X_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \geqslant k^* \right\}$$

Se $k^* = \chi^2_{n,0,95} \sigma_0^2$, trovare la probabilità dell'errore di prima specie.

Esercizio 5. Sia x un'osservazione proveniente da una variabile casuale $N(\mu, \sigma^2)$. Verifichiamo le ipotesi $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \mu = 0, \sigma^2 = 1 \\ \mathbb{H}_1 : \mu = 1, \sigma^2 = 2 \end{cases}$

(a) Data la regione critica $C = \{x | |x| > 2\}$ trovare le probabilità degli errori di prima e seconda specie e calcolare la potenza del test sotto $\mathbb{H}_1$.

(b) Scrivere una generica regione critica.