Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.7 del 15/5/2007

Esercizio 1.

a) La funzione di verosimiglianza è

$$L(\theta) = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{(0,x_{(n)})}(x_{(i)}) \mathbb{1}_{(x_{(n)},+\infty)}(\theta),$$

quindi lo stimatore di massima verosimiglianza è $\hat{\Theta} = X_{(n)}$.

b) Fattorizzando la verosimiglianza si vede che $X_{(n)}$ è una statistica sufficiente. Per valutarne la completezza dobbiamo prima calcolare la sua distribuzione e poi verificare la definizione.

$$\mathbb{P}(X_{(n)} \leqslant x) = \big[\mathbb{P}(X \leqslant x)\big]^n = \left[\int_0^x \frac{2y}{\theta^2}\,\mathrm{d}y\right]^n = \left[\frac{x^2}{\theta^2}\right]^n = \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = 2n\frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$$

$$\mathbb{E}(z(X_{(n)})) \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\theta z(x)2n\frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}}\,\mathrm{d}x \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\theta z(x)x^{2n-1}\,\mathrm{d}x \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(\theta)\theta^{2n-1} \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z(\theta) \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad X_{(n)} \text{ è una statistica completa.}$$

c) $\mathbb{E}(X_{(n)}) = \displaystyle\int_0^\theta x2n\frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}}\,\mathrm{d}x = \frac{2n}{2n+1}\frac{\theta^{2n+1}}{\theta^{2n}} = \frac{2n}{2n+1}\theta$. Quindi $\hat{\Theta}^* = \dfrac{2n+1}{2n}X_{(n)}$ è non distorto ed è funzione di una statistica sufficiente e completa, quindi è un UMVUE.

Esercizio 2.

a) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta-1}$ ($\theta > 1$ altrimenti non esiste il momento primo). Quindi imponiamo che $\frac{1}{\theta-1} = \overline{X}$ e si ha che $\hat{\Theta}_M = \frac{\overline{X}+1}{\overline{X}}$.

b) Si trova che $\hat{\Theta} = \dfrac{n}{\sum_i \ln(1+X_i)}$ e quindi $T = \dfrac{1}{\hat{\Theta}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$.

c) $f(x,\theta) = \theta\exp\{-(1+\theta)\ln(1+x)\}$, quindi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$ è una statistica sufficiente, minimale e completa.

d) $Y = \ln(1+X) \sim Esp(\theta)$ e quindi $\displaystyle\sum_{i=1}^n \ln(1+X_i) \sim Gamma(n,\theta)$ e quindi

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n \ln(1+X_i) - \frac{n}{\theta}\right)^2\right) = \frac{n}{\theta^2}$$

e quindi se S è uno stimatore non distorto di $\frac{1}{\theta}$ si ha $Var(S) \geqslant \frac{1}{n\theta^2}$.

e) $T \sim Gamma(n, n\theta)$ e quindi $Var(T) = \frac{1}{n\theta^2}$ e quindi T è UMVUE. Se $Z = \frac{1}{T}$ si trova che $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{n-1}\theta$ e quindi $Z^* = \frac{n-1}{n}Z$ è uno stimatore non distorto che è funzione di una statistica sufficiente e completa e quindi è UMVUE.

Esercizio 3. Le variabili sono $Esp(\theta)$, quindi $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i \sim Gamma(n,\theta)$, si può vedere (per esempio attraverso la f.g.m.) che $\displaystyle 2\theta\sum_{i=1}^n X_i \sim Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right)$ ovvero χ^2_{2n}.
L'intervallo di confidenza è

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n} \leqslant 2\theta\sum_{i=1}^n X_i \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}{2\sum_{i=1}^n X_i} \leqslant \theta \leqslant \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}}{2\sum_{i=1}^n X_i}\right)$$

Esercizio 4.

$$0,95 = \mathbb{P}\left(-z_{0,975} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{0,3/\sqrt{n}} \leqslant z_{0,975}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{0,975}\frac{0,3}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{0,975}\frac{0,3}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\overline{X} - 1,96\frac{0,3}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + 1,96\frac{0,3}{\sqrt{n}}\right)$$

Deve quindi essere $1,96\frac{0,3}{\sqrt{n}} \leqslant 0,1$ e quindi $n \geqslant 34,5744$.

Esercizio 5. Indichiamo con θ il peso reale.

$$\begin{aligned}
0,95 &= \mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{0,975}\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leqslant \theta \leqslant \overline{X} + z_{0,975}\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(3,1502 - 1,96\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leqslant \theta \leqslant 3,1502 + 1,96\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(3,1414 \leqslant \theta \leqslant 3,1590\right) \\
0,99 &= \mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{0,995}\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leqslant \theta \leqslant \overline{X} + z_{0,995}\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(3,1502 - 2,57\frac{0,01}{\sqrt{5}} \leqslant \theta \leqslant 3,1502 + 2,57\frac{0,01}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(3,1387 \leqslant \theta \leqslant 3,1617\right)
\end{aligned}$$