Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.6 del 8/5/2007

Esercizio 1.

a) $\mathbb{E}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln f(X,\theta)\right)^2\right) = \mathbb{E}((X-\theta)^2) = Var(X) = 1$. Se T_1è lo stimatore di θ, T_2 di θ^2 e T_3 di $\mathbb{P}(X>0)$ si ha:

$$Var(T_1) \geqslant \frac{1}{n} \qquad Var(T_2) \geqslant \frac{4\theta^2}{n}$$

e considerando che

$$\mathbb{P}(X>0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\theta}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(X))$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathbb{P}(X>0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

e quindi

$$Var(T_3) \geqslant \frac{e^{-\theta^2}}{2\pi n}$$

b) Se poniamo $T_2 = X^2 - 1$ si ha che $\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(X^2) - 1 = Var(X) + \theta^2 - 1 = \theta^2$.

c) Se poniamo $T_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(X_i)$ si ha che $\mathbb{E}(T_3) = \mathbb{P}(X>0)$.

d) Ricordiamo che lo stimatore di massima verosimiglianza per θ è $\overline{X}$ e poiché la funzione di θ

$$\int_{-\theta}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$$

è biunivoca si ha che lo stimatore di massima verosimiglianza di $\mathbb{P}(X>0)$ è

$$T_3^* = \int_{-\overline{X}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\overline{X})^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

e) Si calcola facilmente che lo stimatore $T_2^* = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}$ è non distorto e poiché è funzione della statistica sufficiente, minimale e completa $\sum_{i=1}^{n} X_i$ è l'UMVUE cercato.

Esercizio 2.

a) Calcoliamo lo stimatore di massima verosimiglianza di θ. Si trova che $\hat{\Theta} = -\dfrac{n}{\sum_i \ln X_i}$. Quindi, poiché la funzione di θ $\mu = \frac{\theta}{1+\theta}$ è biunivoca, per l'invarianza si ha che $\hat{M} = \dfrac{-n}{\sum_i \ln X_i - n}$

b) $f(x,\theta) = \theta \exp\{(\theta-1)\ln x\}$, quindi $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ è una statistica sufficiente, minimale e completa.

c) Calcoliamo l'informazione attesa di Fisher per una variabile:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln f(x,\theta)\Big)^2\Big) &= \mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\ln\theta + (\theta-1)\ln x)\Big)^2\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big(\Big(\frac{1}{\theta} + \ln x\Big)^2\Big) = Var(-\ln X) = \frac{1}{\theta^2}\end{aligned}$$

poiché le variabili $Y_i = -\ln X_i$, $i = 1,\dots,n$ sono $Esp(\theta)$. Quindi la variabile $Z = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \sim Gamma(n, n\theta)$ e quindi la sua media è $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\theta}$ e la sua varianza è $Var(Z) = \frac{1}{n\theta^2}$ e $Z = \frac{1}{\hat{\theta}}$ è lo stimatore di massima verosimiglianza di $\frac{1}{\theta}$. Il limite inferiore di Cramer-Rao per gli stimatori non distorti di $\frac{1}{\theta}$ è:

$$Var(T) \geqslant \frac{\left(\frac{1}{\theta^2}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{1}{n\theta^2} = Var(Z)$$

quindi Z raggiunge il limite inferiore di Cramer-Rao, quindi una funzione del parametro θ per la quale esiste uno stimatore non distorto che raggiunge il limite inferiore è $\frac{1}{\theta}$.

d) Ovviamente $Z = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ è l'UMVUE di $\frac{1}{\theta}$. Calcoliamo il valore atteso di $\hat{\Theta}$ (sapendo che $\frac{1}{\hat{\Theta}} \sim Gamma(n, n\theta)$):

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{(n\theta)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-n\theta x}\,\mathrm{d}x = n\theta\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{n-1}\theta$$

quindi lo stimatore $\hat{\Theta}^* = \frac{n-1}{n}\hat{\Theta}$ è non distorto ed essendo funzione della statistica sufficiente e completa S è, per il teorema di Lehman-Scheffè, l'UMVUE di θ.