Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.5 del 24/4/2007

Esercizio 1. Cerchiamo di fattorizzare la funzione di verosimiglianza.

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\Big[\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\mu^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i\Big]\right\}$$

e definendo

$$h(x_1,\dots,x_n)=1 \quad \text{e} \quad g(s_1,s_2,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\Big[\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\mu^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i\Big]\right\}$$

la verosimiglianza è fattorizzata con $s_1=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ e $s_2=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Quindi $S_1=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ e $S_2=\sum_{i=1}^{n}X_i$ sono statistiche congiuntamente sufficienti.

Esercizio 2. Cerchiamo di fatorizzare la funzione di verosimiglianza.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)=\theta^n\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big)^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})\mathbb{1}_{(x_{(1)},1)}(x_{(n)})$$

e definendo

$$h(x_1,\dots,x_n)=\mathbb{1}_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})\mathbb{1}_{(x_{(1)},1)}(x_{(n)}) \quad \text{e} \quad g(s,\theta)=\theta^n\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big)^{\theta-1}$$

la verosimiglianza è fattorizzata con $s=\prod_{i=1}^{n}x_i$. Quindi $S=\prod_{i=1}^{n}X_i$ è una statistica sufficiente.

Esercizio 3. Calcoliamo l'iformazione attesa di Fisher di una singola variabile.

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{\partial}{\partial\mu}\Big(-\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)=\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$
$$\mathbb{E}\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln f(x,\mu,\sigma^2)\Big)^2\bigg)=\mathbb{E}\Big(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\Big)=\frac{1}{\sigma^2}$$

Quindi si ha che se T è uno stimatore non distorto di μ è $Var(T) \geqslant \frac{\sigma^2}{n}$. Consideriamo lo stimatore di massima verosimiglianza di μ che è $\hat{\mu} = \overline{X}$, $\hat{\mu}$ è uno stimatore non distorto e la sua varianza è $Var(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$ ed è pari al limite inferiore di Cramer-Rao, quindi $\hat{\mu}$ è un UMVUE per μ.

Esercizio 4. Siano $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x),\ \theta > 0$.

(a)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})\mathbb{1}_{(x_{(n)},+\infty)}(\theta)$$

Il massimo della verosimiglianza è quindi assunto in $x_{(n)}$, quindi lo stimatore di massima verosimiglianza è $\hat{\theta} = X_{(n)}$.

(b) La verosimiglianza si fattorizza ponendo $h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})$ e $g(s,\theta) = \frac{2^n}{\theta^{2n}}\mathbb{1}_{(x_{(n)},+\infty)}(\theta)$, quindi $S = X_{(n)}$ è una statistica sufficiente.
Per la completezza: si calcola che $X_{(n)} \sim f(x,\theta) = \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(z(X_{(n)})) = \int_0^\theta z(x)\frac{2n}{\theta^{2n}}x^{2n-1}\,\mathrm{d}x \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\theta z(x)x^{2n-1}\,\mathrm{d}x \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \text{(differenziando entrambi i membri in } \theta) \quad z(\theta)\theta^{2n-1} \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \quad z(\theta) \equiv 0 \quad \forall\,\theta > 0.
\end{aligned}$$

Quindi $X_{(n)}$ è una statistica completa.

(c) Non è possibile trovare il limite inferiore di Cramer-Rao perché non sono soddisfatte le condizioni di regolarità, infatti

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^\theta \frac{2x}{\theta^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\theta} + \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2x}{\theta^2}\right)\mathrm{d}x$$

Per trovare l'UMVUE consideriamo lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$: $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \frac{2n}{2n+1}\theta$, quindi lo correggiamo e consideriamo lo stimatore non distorto $\hat{\theta}^* = \frac{2n+1}{2n}X_{(n)}$. Applichiamo il teorema di Blackwell-Rao con $\hat{\theta}^*$ stimatore non distorto e $X_{(n)}$ statistica sufficiente:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}^*|X_{(n)}) = \mathbb{E}\Big(\frac{2n+1}{2n}X_{(n)}|X_{(n)}\Big) = \frac{2n+1}{2n}X_{(n)} = \hat{\theta}^*$$

Quindi $\hat{\theta}^*$ è un UMVUE per θ.