Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.3 del 20/3/2007

Esercizio 1 (Esonero 6/4/2006).

1) Per simmetria le marginali sono uguali. Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \\
&= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\Big[\int_x^{+\infty} e^{-y}(1-e^{-x})\,\mathrm{d}y + \int_0^x e^{-x}(1-e^{-y})\,\mathrm{d}y\Big] = \\
&= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\Big[(1-e^{-x})e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x}(e^{-x}-1)\Big] = xe^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)
\end{aligned}
$$

2) Sempre per simmetria

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(3) = 2! = 2$$

3) Ancora per simmetria $Var(X) = Var(Y)$. Abbiamo

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(4) = 3! = 6$$

e dunque $Var(X) = 6 - 2^2 = 2$.

4) Per calcolare ρ_{XY} calcoliamo prima $\mathbb{E}(XY)$.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^{+\infty}\int_0^y xye^{-y}(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty}\int_0^x xye^{-x}(1-e^{-y})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

e dalla simmetria segue che

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= 2\int_0^{+\infty} ye^{-y}\Big[\int_0^y x(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{+\infty} y^3e^{-y}\,\mathrm{d}y + 2\int_0^{+\infty} y^2e^{-2y}\,\mathrm{d}y + 2\int_0^{+\infty} ye^{-2y}\,\mathrm{d}y - 2\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,\mathrm{d}y = \\
&= \Gamma(4) + \frac{1}{4}\Gamma(3) + \frac{1}{2}\Gamma(2) - 2\Gamma(2) = 5
\end{aligned}
$$

da cui

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{5-2^2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2 (Esonero 6/4/2006).

1)

$$m_Y(t) = \mathbb{E}(e^{2X^2t}) = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2(1-2t)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-2t}\int_0^{+\infty} e^{-u}du =$$
$$= \frac{1}{1-2t} = \frac{1/2}{1/2-t} \qquad \text{con } 2t<1$$

2) Dal punto 2 abbiamo che $Y \sim Gamma\big(1, \frac{1}{2}\big)$ cioè una distribuzione esponenziale di parametro $\frac{1}{2}$ o analogamente un χ^2_2.

3) Poiché $Z \sim \chi^2_2$ abbiamo che $W = \frac{Y}{Z} = \frac{Y/2}{Z/2}$ ha una distribuzione $F(2,2)$.

Esercizio 3.

1)

$$\mathbb{E}\big(e^{t(X_1+X_2)}\big) = \mathbb{E}(e^{tX_1})\mathbb{E}(e^{tX_2}) = \big(\mathbb{E}(e^{tX_1})\big)^2 = e^{t2\mu+\frac{1}{2}t^2 2\sigma^2}$$

che è la funzione generatrice dei momenti di una $N(2\mu, 2\sigma^2)$.

$$\mathbb{E}\big(e^{t(X_1-X_2)}\big) = \mathbb{E}(e^{tX_1})\mathbb{E}(e^{-tX_2}) = e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}e^{-t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{\frac{1}{2}t^2 2\sigma^2}$$

che è la funzione generatrice dei momenti di una $N(0, 2\sigma^2)$.

2) Come sopra si trova che $\mathbb{E}(e^{t\overline{X}}) = e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n}}$ che è la funzione generatrice dei momenti di una $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

3)
$$U = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2_n$$

4) Si ha che $W = \dfrac{Z}{\sqrt{U/n}} \sim t_n$.

Esercizio 4 (Appello 6/7/2006).

1) La distribuzione di U è χ^2_n.
2) La distribuzione di $\overline{X}$ è $N\big(0, \frac{1}{n}\big)$.
3) La distribuzione di S^2 è $Gamma\big(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\big)$.
4) La distribuzione di $\frac{U}{nS^2}$ è $F(n, n-1)$.
5) La distribuzione di $\frac{X_1}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$ è $t(n)$.

Esercizio 5 (Appello 14/9/2006).

1) La funzione generatrice dei momenti per una variabile con distribuzione $\Gamma(k,\lambda)$ è

$$m_X(t) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^k$$

e quindi in questo caso

$$m_X(t) = \Big(\frac{1}{1-2t}\Big)^k$$

e quindi

$$m_{\overline{X}}(t) = \mathbb{E}(e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^n X_i}) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}\Big(\frac{t}{n}\Big) = \Bigg(\frac{1}{1-\frac{2t}{n}}\Bigg)^{kn}$$

cioè la media campionaria ha distribuzione $\Gamma\big(kn, \frac{n}{2}\big)$.

2)

$$X_1 \sim Gamma\Big(k, \frac{1}{2}\Big) = \chi^2_{2k}$$

da cui

$$Z = \frac{U/m}{X_1/2k} \sim F(m, 2k)$$

3)

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{2k}{2k-2} = \frac{k}{k-1}$$

Esercizio 6 (Appello 11/1/2007).

1)

$$U \sim Gamma(n, \theta)$$

(vd. MGB pg. 202)

2)

$$\overline{X} \sim \Gamma(n, n\theta)$$

(vd. MGB pg. 245)

3) Per $\theta = \frac{1}{2}$, poiché $Esp\big(\frac{1}{2}\big) = Gamma\big(1, \frac{1}{2}\big) = \chi^2_2$ allora $\frac{X_i}{X_j} \sim F(2,2)$.

Esercizio 7. Calcoliamo i momenti primo e secondo:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(r+1)}{\lambda^{r+1}} = \frac{r}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^{r+2}} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

Dobbiamo impostare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{r}{\lambda} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i \\ \dfrac{r(r+1)}{\lambda^2} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_1^2 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema (ovvero lo stimatore ottenuto tramite il metodo dei momenti) è: $\hat{\Theta} = (\hat{r}, \hat{\lambda}) = \left(\frac{\overline{X}^2}{\frac{n-1}{n} S^2}, \frac{\overline{X}}{\frac{n-1}{n} S^2} \right)$.

Esercizio 8. Scriviamo la funzione di verosimiglianza:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{(x_i,+\infty)}(\theta) \mathbb{1}_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)}) = \\ &= \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i \; \mathbb{1}_{(x_{(n)},+\infty)}(\theta) \mathbb{1}_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)}) \end{aligned}$$

La funzione di verosimiglianza è una funzione decrescente in θ, quindi assume il massimo all'estremo sinistro dell'intervallo di definizione: $\hat{\Theta} = X_{(n)}$. Per calcolarne media e varianza abbiamo bisogno della sua distribuzione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(n)} \leqslant x) &= \Big[\mathbb{P}(X \leqslant x)\Big]^n = \left[\int_0^x \frac{2y}{\theta^2} \, \mathrm{d}y \right]^n = \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}} \\ f_{X_{(n)}}(x) &= \frac{2n x^{2n-1}}{\theta^{2n}} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora valore atteso e varianza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\Theta}) &= \int_0^\theta x \frac{2n x^{2n-1}}{\theta^{2n}} \, \mathrm{d}x = \frac{2n}{2n+1} \theta \\ \mathbb{E}(\hat{\Theta}^2) &= \int_0^\theta x^2 \frac{2n x^{2n-1}}{\theta^{2n}} \, \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} \theta^2 \\ Var(\hat{\Theta}) &= \frac{n}{n+1} \theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1} \theta \right)^2 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \theta^2 \end{aligned}$$