Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.3 del 20/3/2007

Esercizio 1 (Esonero 6/4/2006). Siano X e Y variabili casuali con densità congiunta

$$f_{XY}(x,y) = e^{-y}(1-e^{-x})\mathbb{1}_{(0,y)}(x)\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y) + e^{-x}(1-e^{-y})\mathbb{1}_{(0,x)}(y)\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

1) Calcolare le marginali.
2) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$.
3) Calcolare $Var(X)$ e $Var(Y)$
4) Calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

Esercizio 2 (Esonero 6/4/2006). Sia X una variabile casuale con densità

$$f_X(x) = 2xe^{-x^2}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

1) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di $Y = 2X^2$.
2) Determinare la distribuzione di Y.
3) Se Z è una variabile casuale con distribuzione χ^2_2, determinare la distribuzione di $W = \frac{Y}{Z}$.

Esercizio 3. Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale da una densità normale con media μ e varianza σ^2.

1) Usando la funzione generatrice dei momenti determinare la distribuzione di $X_1 + X_2$ e di $X_1 - X_2$.
2) Determinare la distribuzione della media campionaria $\overline{X}$.
3) Determinare la distribuzione di $U = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.
4) Se Z è una variabile casuale con distribuzione normale standard determinare la distribuzione di $W = \frac{Z}{\sqrt{U/n}}$.

Esercizio 4 (Appello 6/7/2006). Sia $X_1, ...X_n$ un campione casuale da una distribuzione normale standard.

1) Determinare la distribuzione di $U := \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.
2) Determinare la distribuzione della media campionaria $\overline{X}$.

3) Determinare la distribuzione della varianza campionaria S^2.
4) Determinare la distribuzione di $\frac{U}{nS^2}$.
5) Determinare la distribuzione di $\frac{X_1}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$.

Esercizio 5 (Appello 14/9/2006). Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione gamma di parametri k e $\lambda = \frac{1}{2}$.

1) Determinare la distribuzione della media campionaria.
2) Se U è una variabile casuale con distribuzione chi-quadrato con m gradi di libertà, determinare la distribuzione di $Z = \frac{2k}{m}\frac{U}{X_1}$.
3) Calcolare $\mathbb{E}(Z)$.

Esercizio 6 (Appello 11/1/2007). Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione esponenziale di parametro θ.

1) Si Calcoli la distribuzione di $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2) Si calcoli la distribuzione della media campionaria.
3) Per $\theta = \frac{1}{2}$ si calcoli la distribuzione di $\frac{X_i}{X_j}$ per $i \neq j$.

Esercizio 7. Siano $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Gamma(r, \lambda)$. Si stimino con il metodo dei momenti i due parametri.

Esercizio 8. Siano $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} f_X(x) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0$. Si trovi lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e se ne calcolino media e varianza.